Clasa a VII-a

1) *Într-un triunghi ABC cu unghiurile B şi C ascuţite, iar AD este înălţimea dusă din A pe BC, are loc relaţia:*

$$2AD < (AB + AC)\sqrt{2} - |AB - AC|.$$

(Nicuşor Minculete, Sfântul Gheorghe)

Solutie. Intr-un triunghi dreptunghic MNP (cu ipozenuza $MN = p$) avem

$$2p^2 = 2\left(m^2 + n^2\right) \geq (m + n)^2\,,$$

deci obtinem $p\sqrt{2} \geq m + n$. Aplicand aceasta inegalitate in triunghiurile dreptunghice ADB si ADC,rezulta ca $AB\sqrt{2} \geq AD + BD$ si $AC\sqrt{2} \geq AD + DC$, ceea ce inseamna ca

$$(AB + AC)\sqrt{2} \geq 2AD + BC,$$

dar $BC > |AB - AC|$, deoarece $BC + AC > AB$ si $BC + AB > AC$. Prin urmare, combinand aceste inegalitati rezulta inegalitatea din enunt.

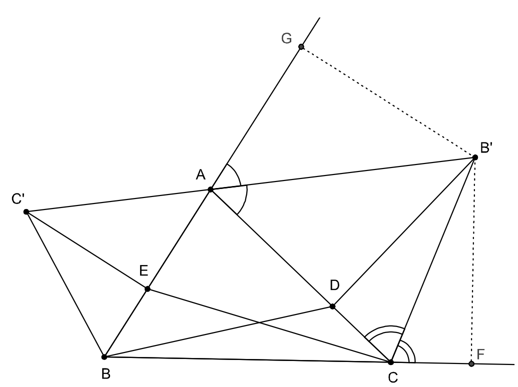
2) *Fie B' şi C' punctele de intersecţie dintre bisectoarele exterioare ale unghiurilor A şi C, respectiv A şi B ale unui triunghi ABC, iar D şi E picioarele perpendicularelor duse din B' şi C' pe AC, respectiv AB. Să se arate că:*

a) *$AD = p - c$ şi $AE = p - b$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$, iar a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB.*

b) *dacă $BD = CE$, atunci triunghiul ABC este isoscel.*

(Cătălin Barbu - Bacău şi Ion Pătraşcu - Craiova)

Solutie. a) Fie F, G proiecţiile lui B' pe BC, respectiv AB. Deoarece $\Delta B'AG \equiv \Delta B'AD$ şi $\Delta B'FD \equiv \Delta B'CD$, rezultă $B'G \equiv B'D \equiv B'F$ şi $AG \equiv AD, CF \equiv CD$. Atunci, $\Delta B'GB \equiv \Delta B'FB$ (I.C.), deci $BG \equiv BF \Leftrightarrow c + AG = a + CF \Leftrightarrow c + AD = a + CD \Leftrightarrow AD = a + (b - AD) - c \Leftrightarrow AD = p - c$. Analog, $AE = p - b$.



Aplicând teorema cosinusului în triunghiurile ABD, ACE obţinem:

$$BD^2 = c^2 + (p-c)^2 - 2c(p-c)\cos A,$$

$$CE^2 = b^2 + (p-b)^2 - 2b(p-b)\cos A.$$

Din $BD^2 = CE^2$ avem

$$(b-c)(b+c-a) + 2(b-c)(b+c-p)\cos A = 0,$$

sau

$$(b-c)(b+c-a)\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = 0.$$

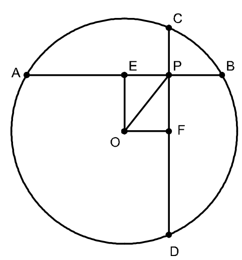
Din inegalitatea triunghiului avem: $b+c-a>0$ şi $\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} > 0$, de unde rezulta ca $b=c$.

3) *Într-un cerc de centru O şi rază R se consideră mulţimea coardelor perpendiculare AB şi CD, concurente într-un punct P, având proprietatea*

$$AB^2 + CD^2 = k \in \mathbb{R}_+^* \qquad (*)$$

Determinaţi mulţimea punctelor P ce verifică proprietatea $(*)$.
(Dorin Andrica, Cluj-Napoca)

Solutie Fie E şi F proiecţiile lui O pe AB, respectiv CD.



Deoarece E este mijlocul lui AB, rezulta

$$OE^2 + EB^2 = R^2,$$

sau $OE^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4}$. Analog, $OF^2 = R^2 - \frac{CD^2}{4}$, deci

$$OP^2 = OE^2 + OF^2 = 2R^2 - \frac{k}{4} = const.$$

1) Dacă $2R^2 - \frac{k}{4} < 0$, sau $k > 8R^2$, atunci $OP^2 < 0$, deci nu există nici un punct cu proprietatea $(*)$.

2) Dacă $2R^2 - \frac{k}{4} = 0$, sau $k = 8R^2$, atunci $OP^2 = 0$, deci $P \equiv O$.

3) Dacă $2R^2 - \frac{k}{4} > 0$, sau $k < 8R^2$, atunci $OP^2 = const$, deci punctele P cu proprietatea $(*)$ se află pe un cerc cu centrul în puntul O şi rază $\sqrt{2R^2 - \frac{k}{4}}$.