

Barem de corectare, Concurs RMCS 2011, Clasa a VII a

1.	Egalitatea din enunț se poate scrie $(x - y)(x + y) = 2(x + y)$.	1p
	Notăm $F = \frac{x-1}{y+1}$ și avem: dacă $x + y \neq 0$, atunci $x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2$ și $F = 1$; dacă $x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow F = -1$	4p
	Reciproc, dacă $F = 1$, atunci $x = y + 2$ și se obține $(x - y)(x + y) = 2(x + y)$ Dacă $F = -1$, atunci $y = -x$ și din nou egalitatea din enunț este verificată.	2p
2.	a) dacă 4 dintre cameleonii colorați în verde se întâlnesc cu cei 4 colorați în galben, iar al cincilea colorat în verde se întâlnește cu unul colorat în roșu, atunci vor fi doi colorați în galben și restul în roșu;	3p
	b) presupunem că după m întâlniri dintre un cameleon galben și unul verde, după n întâlniri între unul verde și unul roșu și după p întâlniri între un cameleon galben și unul roșu, toți cameleonii sunt colorați în verde. Se ajunge astfel la egalitățile: $\begin{cases} 12 = 5 + 2p - m - n \\ 0 = 4 + 2n - m - p \\ 0 = 3 + 2m - n - p \end{cases}$ scădem primele două egalități și avem: $3p - 3n = 11 \Rightarrow 3(p - n) = 11$, absurd.	4p
3.	Numărul se poate scrie $ 3^{n+1} - 3 \cdot 5^m = 3 \cdot 3^n - 5^m $, deci este minim dacă și numai dacă $ 3^n - 5^m $ este minim.	1p
	Cum $m \neq n \Rightarrow 3^n - 5^m \neq 0$.	1p
	Deoarece 3^n și 5^m sunt impare, valoarea minimă a lui $ 3^n - 5^m $ este 2;	3p
	aceasta se obține, de exemplu, pentru $m = n = 1$. Numărul minim cerut inițial este 6.	2p
4.	a) $BD = DE \Rightarrow \sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle CED$	1p
	Considerăm $F \in (CE)$ astfel încât $BC = FE$, de unde $\triangle BDC \equiv \triangle EDF$ (L.U.L.)	1p
	Deducem $CD = DF$ și $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DCF = \sphericalangle ACB = 60^\circ \Rightarrow \triangle CDF$ echilateral	1p
	$CF = CD$ și apoi $AD = AC + CD = BC + CF = FE + CF = CE$	1p
	b) Folosim teorema lui Menelaus pentru triunghiul ACE și punctele coliniare B, H, G : $\frac{BC}{BE} \cdot \frac{GE}{GA} \cdot \frac{HA}{HC} = 1$. Deducem $\frac{BC}{2BC + CD} = \frac{HC}{HA} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = CD = AC$.	1p + 2p