Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XVII-a, Braşov, 20 mai 2011

Clasa a VII-a

1. Se dă triunghiul ABC. Arătaţi că există şi sunt unice punctele $D \in (AB)$, $E \in (BC)$ şi $F \in (AC)$ astfel încât patrulaterul $ADEF$ să fie romb. Dacă notăm cu S aria rombului, demonstraţi că $S \leq \frac{AB \cdot AC}{4}$ şi precizaţi când se realizează egalitatea.

Constantin Apostol

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Demonstraţi că dacă numerele întregi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au proprietatea că $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| - |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 2$, atunci cel puţin unul dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este egal cu 1 sau cu -1.

Romeo Ilie

3. Aflaţi numerele naturale n cu proprietatea că numărul $8\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ de } 0}1$ este pătrat perfect.

Dorel Miheţ

4. In interiorul triunghiului ABC se ia punctul K şi se realizează următoarea construcţie:

- prin K se duce o paralelă la AC care taie BC în punctul M_1,
- prin M_1 se duce o paralelă la AB care taie AC în punctul N_1,
- prin N_1 se duce o paralelă la BC care taie AB în punctul P_1.

Se continuă construcţia (prin P_1 se duce o paralelă la AC care taie BC în punctul M_2,...).

Să se precizeze poziţia punctului K astfel încât prin procedeul indicat:

a) să se obţină cel mai mare număr de triunghiuri,

b) să se obţină cel mai mare număr de triunghiuri congruente, respectând cerinţa precedentă,

c) să se obţină cel mai mare număr de triunghiuri congruente.

Horea Banea

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XVII-a, Braşov, 20 mai 2011

Clasa a VIII-a

1. Dacă a, b, c, x, y, z sunt numere strict pozitive, atunci:

$$a \cdot \frac{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}{xy} + b \cdot \frac{\sqrt{y^2 + yz + z^2}}{yz} + c \cdot \frac{\sqrt{z^2 + zx + x^2}}{zx}$$
$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a+c}{x} + \frac{b+a}{y} + \frac{b+c}{z}\right).$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Se dă patrulaterul convex $ABCD$. In punctele M, N, P, Q, mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), (DA) se ridică perpendiculare pe planul patrulaterului şi se iau pe ele, de aceaşi parte a planului punctele M_1, N_1, P_1, Q_1, astfel încât $MM_1 = AB$, $NN_1 = BC$, $PP_1 = CD$, $QQ_1 = DA$. Să se arate că punctele M_1, N_1, P_1, Q_1 sunt coplanare dacă şi numai dacă patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil.

Constantin Apostol

3. Determinaţi numerele naturale nenule x, y şi numărul prim p dacă

$$x^{2011} + y^{2011} = pxy.$$

Aurel Bârsan

4. a) Să se demonstreze că în triunghiul ABC avem $\mathrm{m}(\widehat{A}) = 60^\circ$ dacă şi numai dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

b) Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Să se demonstreze că planele $A'BC$ şi $C'AB$ sunt perpendiculare dacă $AA' = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot AB$.

Romeo Ilie