Soluții

Subiectul 1:

Pentru orice $n \geq 1$, avem inegalitatea:
$n+1 < \sqrt{n(n+4)} < n+2 \ \Rightarrow \ \left[\sqrt{n(n+4)}\,\right] = n+1$.
Ecuația devine: $2+3+...+n+1 = 230$. Rezultă $n = 20$.

Subiectul 2:

a). Dacă $y = \sqrt{3} \Rightarrow (x-\sqrt{2})^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right\}$.

Analog, $x = \sqrt{2} \Rightarrow y \in \left\{1+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right\}$. Deci A conține cel puțin 4 elemente.

b). Fie $\{x, y\} \in A \cap B \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Q}$, $y^2 \in \mathbb{Q}$ cu $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2+4 = 2(x\sqrt{2}+y\sqrt{3})$ (1)
.
Ridicând la pătrat relația (1), implică

$$\left(x^2+y^2+4\right)^2 - 4\left(2x^2+3y^2\right) = 8xy\sqrt{6} \Rightarrow xy\sqrt{6} = t, t \in \mathbb{Q} .$$

Dacă $x = 0 \Rightarrow \left(y-\sqrt{3}\right)^2 = -1$ (fals). Deci $x \neq 0$. Atunci $y = \dfrac{t}{x\sqrt{6}}$ și înlocuind în relația (1), obținem: $2(x\sqrt{2} + \dfrac{t}{x\sqrt{6}}\sqrt{3}) = x^2+y^2+4 \Leftrightarrow 2\dfrac{2x^2+t}{x\sqrt{2}} = x^2+y^2+4 \Leftrightarrow$

$$x\sqrt{2} = 2\frac{2x^2+t}{x^2+y^2+4} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \alpha\sqrt{2}, \alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow y = \frac{t}{\alpha\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{t\sqrt{3}}{6\alpha} \Rightarrow y = \beta\sqrt{3}, \beta \in \mathbb{Q} .$$

Deci $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow 2\left(\alpha-1\right)^2 + 3\left(\beta-1\right)^2 = 1$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Notăm $\alpha - 1 = \dfrac{m}{n}$, $\beta - 1 = \dfrac{p}{q}$, $m, n, p, q \in N^*$ cu $\left(m, n\right) = 1$ și $\left(p, q\right) = 1$.

Obținem $2\left(mq\right)^2 + 3\left(pn\right)^2 = (nq)^2$ (2).

Dacă $mq \in M_3 + 1$ sau $mq \in M_3 + 2 \Rightarrow 2\left(mq\right)^2 \in M_3 + 2$

$\Rightarrow 2\left(mq\right)^2 + 3\left(np\right)^2 \in M_3 + 2 \Rightarrow \left(nq\right)^2 \in M_3 + 2$, imposibil.

Deci $mq \in M_3 \Rightarrow mq = 3k, k \in N^*$. Înlociund în relația (2), obținem:

$2 \cdot 9k^2 + 3\left(pn\right)^2 = \left(nq\right)^2 \ \Rightarrow \left(nq\right)^2 \in M_3 \Rightarrow \left(nq\right) \in M_3 \Rightarrow nq = 3k', k' \in N^*$.

Presupunând că 3 nu divide q, din $mq = 3k$ și $nq = 3k'$ obținem $m \vdots 3$ și $n \vdots 3 \Rightarrow \left(m, n\right) \neq 1$ (fals). Deci $q \vdots 3 \ \Rightarrow q = 3^s \cdot q'$, $s \in N^*$ și 3 nu divide q'. Înlocuind din nou în (2), obținem (3)

$2m^2 9^s q'^2 + 3\left(pn\right)^2 = n^2 9^s q'^2 \ \Leftrightarrow$

$3\left(pn\right)^2 = 9^s\left(n^2 q'^2 - 2m^2 q'^2\right) \Rightarrow 3\left(pn\right)^2 \vdots 9^s \Rightarrow pn \vdots 3^s$.

Dar $(p,q)=1 \Rightarrow$ 3 nu divide $p \Rightarrow n \vdots 3^s \Rightarrow n = 3^s n', \ n' \in N^*$. Înlociund în (3), obținem: $2m^2 9^s q'^2 + 3p^2 9^s n'^2 = 9^s n'^2 9^s q'^2 \Rightarrow (mq')^2 \vdots 3 \Rightarrow mq' \vdots 3$ şi cum 3 nu divide $q \Rightarrow m \vdots 3$. Dar $n \vdots 3 \Rightarrow (m,n) \neq 1$ (fals). Deci nu există $(x,y) \in A \cap B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

Subiectul 3:

a). Fie pătratul $ABCD$ şi $M \in (AD)$. Presupunem $DM > MA$. Dacă O este centrul de greutate al triunghiului MNP, atunci MO conține mediana MM_1 a triunghiului şi $OM_1 = \frac{MO}{2}$. Prelungim segmentul OM cu $OM_1 = \frac{MO}{2}$. Obținem astfel mijlocul segmentului PN. Dacă N şi P sunt pe laturile pătratului, atunci triunghiul NCP este dreptunghic în C şi $CM_1 = PM_1 = NM_1$. Deducem de aici că punctele N şi P sunt intersecțiile laturilor pătratului cu cercul de centru M_1 şi de rază egală cu CM_1. Fie $N \in BC$ şi $P \in CD$. Am obținut astfel triunghiul căutat.

b). Notăm $a = AB$. Fie $\{M_2\} = OM \cap CB$, $M_1Q \perp CB$ şi $OT \perp CB$. În $\triangle M_2OT$, M_1Q este linie mijlocie, deci $M_1Q = \frac{OT}{2} = \frac{a}{4}$. Dar M_1Q este linie mijlocie şi în $\triangle NCP$, deci $M_1Q = \frac{CP}{2}$. Rezultă că P este mijlocul laturii CD.

c). Notând $x = AM$, avem evident $CM_2 = x$. Din congruența triunghiurilor OPM_1 şi M_2NM_1 implică $M_2N = \frac{a}{2}$. De aici $BN = \frac{a}{2} - x$. Astfel $A_{\triangle MNP} = A_{ABCD} - A_{\triangle MPD} - A_{\triangle CPN} - A_{ABNM} = \frac{3a^2}{8}$.