CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ TINERE SPERANŢE"
Ediţia a VII - a, 9 decembrie 2011
CLASA a V –a

PROBA PE ECHIPE

Problema nr. 1

Restul împărţirii unui număr natural m la 12 este 8. Restul împărţirii numărului natural n la 18 este 11.

a) Aflaţi restul împărţirii numărului $5m + 7n$ la 6.
b) Aflaţi restul împărţirii numărului $5m - 7n$ la 6.

Problema nr. 2

a) Se consideră numerele: $x = 2 \cdot 4^n \cdot 5^{2n+1} + 1$; $y = 4 \cdot 2^{2n} \cdot 5^{2n} - 1$; $z = 2^{2n} \cdot 5^{2n+2} - 1$ şi $t = 2 \cdot 4^n \cdot 25^n + 1$, $n \in \mathbf{N}$. Să se determine cea mai mică valoare a numărului a, astfel încât numărul $x + 4y + 2z + 5t + a$ să fie pătrat perfect pentru orice număr natural n.

b) Arătaţi că numărul $A = 23 + 23^2 + 23^3 + ... + 23^{2010}$ este divizibil cu 7.

c) Comparaţi numerele 3^{371} şi 5^{247}.

GM nr. 12/2003

Problema nr. 3

a) Să se rezolve ecuaţia: $(2x + 1) + (5x + 1) + (8x + 1) + ... + (122x + 1) = 5125$

b) Se dau numerele $a = 2^{n+2} - 3 \cdot 2^n$ si $b = 2^2 \cdot 3^{m+2} - 3^{m+3}$. Determinati numerele naturale n si m astfel incât numerele a şi b să ocupe locurile 65, respectiv 730 in sirul numerelor naturale.

E:13728, GM nr. 11/2008

Problema nr. 4

a) Arătaţi că $2590 = 45^2 + 23^2 + 6^2$.

b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n, numărul $X = 5^n \cdot 7^{n+2} + 7^n \cdot 5^{n+2}$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate perfecte.

Timp de lucru: 2 ore

BAREM DE CORECTARE

Problema nr. 1

Soluţie.

a) $m = 12a + 8 \Rightarrow 5m = 60a + 40$
$n = 18b + 11 \Rightarrow 7n = 126b + 77$ *1p*

$5m + 7n = 60a + 126b + 117$ *1p*

$r = 3$..*1p*

b) $5m - 7n = 60a - 126b - 37$ *1p*

$5m - 7n = 6(10a - 21b - 7 + 7) - 37$ *1p*

$5m - 7n = 6(10a - 21b - 7) + 42 - 37$ *1p*

$r = 5$ *1p*

Problema nr. 2

Soluţie

a) *efectuare calcule*..................................*2p*

$a = 14 \cdot 5^{2n} \cdot 2^{2n}$ *1p*

b) $23 + 23^2 + 23^3 = 23(1 + 23 + 23^2) = 23 \cdot 553 = 23 \cdot 7 \cdot 79$........................*1p*

$A = 23 \cdot 553 + 23^4 \cdot 553 + 23^{2008} \cdot 553 \Rightarrow A \vdots 7$ *1p*

c) $3^{371} = 3^{369} \cdot 3^2 = 27^{123} \cdot 9 > 25^{123} \cdot 9 = 5^{246} \cdot 9 > 5^{246} \cdot 5 = 5^{247}$ *2p*

Problema nr. 3

Solutie:

a)*Ecuaţia este echivalentă cu ecuaţia:* $2542x + 41 \cdot 1 = 5125$ *2p*

Soluţia ecuaţiei este $x = 2$ *1p*

b)*Daca a ocupa locul 65 in sirul numerelor naturale, atunci a = 64.*

Cum $a = 2^{n+2} - 3 \cdot 2^n$, *obtinem* $2^{n+2} - 3 \cdot 2^n = 64$. *Din aceasta ecuatie determinam n.*

$2^{n+2} - 3 \cdot 2^n = 64 \Leftrightarrow 2^n \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^n = 64 \Leftrightarrow 2^n \cdot 4 - 3 \cdot 2^n = 64 \Leftrightarrow 2^n \cdot (4-3) = 2^6 \Leftrightarrow 2^n = 2^6 \Leftrightarrow n = 6$

....2p

Dacă b ocupă locul 730 in şirul numerelor naturale, atunci b = 729.

Cum $b = 2^2 \cdot 3^{m+2} - 3^{m+3}$, *obtinem* $2^2 \cdot 3^{m+2} - 3^{m+3} = 729$. *Din aceasta ecuatie determinăm numarul m.*

$2^2 \cdot 3^{m+2} - 3^{m+3} = 729 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^m \cdot 3^2 - 3^m \cdot 3^3 = 729 \Leftrightarrow 3^m \cdot (36 - 27) = 729 \Leftrightarrow 3^m \cdot 9 = 729 \Leftrightarrow$

$3^m = 729 : 9 \Leftrightarrow 3^m = 81 \Leftrightarrow 3^m = 3^4 \Leftrightarrow m = 4.$

Numerele căutate sunt: n = 6 si m = 4..*2p*

Problema nr. 4

Soluţie

a) *efectuare calcule*.......................................*2p*

b) $x = 35^n (64 + 9 + 1)$ *1p*

Studiu pentru n par......................................*2p*

Studiu pentru n impar..................................*2p*