**ŞCOALA CU CLASELE I-VIII „NICOLAE IORGA BAIA MARE**

**CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ**
**„TINERE SPERANŢE” - Ediţia a VII-a**

**Clasa a VII-a**

**Proba pe echipe**
**9 decembrie 2011**

**Subiectul 1.** Demonstraţi că nu există $x,z,y \in \mathbb{Z}$ , astfel încât $x^2-2y^2+8z-3=0$

**Subiectul 2.** În trapezul *ABCD,* cu $AB \parallel CD$ şi CD = 2·*AB*, considerăm punctul *M* mijlocul segmentului [*BC*]. Să se demonstreze că lungimile laturilor triunghiului *AMD* sunt egale cu lungimile medianelor triunghiului *BCD*.

Prof. Ştiru Aurica

**Subiectul 3.** Fie $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2010} \in \mathbb{N}$ direct proporţionale cu 1,2,3, ..., 2010 astfel încât:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_{2010}}{4^{1005}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2010 .$$

Calculaţi media aritmetică a numerelor $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2010}$.

G.M. nr. 2/2010

**Subiectul 4.** Fie *D* mijlocul laturii [*BC*] a triunghiului oarecare *ABC,* iar $A'$ simetricul lui *A* faţă de punctul *D*. Perpendiculara dusă din $A'$ pe *BC* intersectează dreapta *AB* în punctul *M*.

a). Să se demonstreze că AD< $\frac{AB+AC}{2}$;

b). Dacă $MD \perp A'B$ , demonstraţi că triunghiul $AA'C$ este dreptunghic.

- Timp de lucru 2 ore
- Pentru fiecare subiect se acordă 7 puncte

SUCCES !

**Bareme:**

**Subiectul 1.**

SOLUŢIE

1). $x^2-2y^2+8z-3=0 \Leftrightarrow x^2-3=2y^2-8z \Leftrightarrow x^2-3=2\cdot\left(y^2-4z\right) \Rightarrow 2 \mid x^2-3 \Rightarrow x=$ nr. impar $\Rightarrow x=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$ ........................................................................................................2p

2). *Atunci* $x^2-3=2\cdot\left(y^2-4z\right) \Leftrightarrow (2k+1)^2-3=2\left(y^2-4z\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2+4k+1-3=2\left(y^2-4z\right) \Leftrightarrow 2k^2+2k-1=y^2-4z \Leftrightarrow 2\cdot\left(k^2+k+2z\right)=y^2+1 \Rightarrow$

$2 \mid y^2+1 \Rightarrow y=nr.impar \Rightarrow y=2p+1, p\in\mathbb{Z}$ ........................................................................2p

3). *Înlocuind în relaţia* $2\cdot\left(k^2+k+2z\right)=y^2+1$ *obţinem* $k^2+k+2z=2p^2+2p+1 \Leftrightarrow$

$k\cdot(k+1)+2z=2p\cdot(p+1)+1$..........................................................................................2p

4). *Deoarece* $k\cdot(k+1)$ *este număr par,* $\Rightarrow k\cdot(k+1)+2z$ *este număr par, dar* $2p\cdot(p+1)+1$ *este nr. impar,* $\Rightarrow$ *nr. par = nr. impar, contradicţie* $\Rightarrow$ *că nu există x,z,y* $\in\mathbb{Z}$, *astfel încât* $x^2-2y^2+8z-3=0$ ..........................................................................................................1p

**Subiectul 2.**

SOLUŢIE

*1). Fie* $E\in(CD)$ *astfel încât DE=EC,* $\Rightarrow$ *BE mediană în* $\triangle BCD$. *Din ipoteză DC=2·AB* $\Rightarrow DE=\dfrac{DC}{2}=AB$ *şi* $AB\parallel DE \Rightarrow$ *ABED este paralelogram* $\Rightarrow BE\parallel AD$ *şi BE=AD (1)*..2p.

*2). Din ipoteză BM=MC* $\Rightarrow$ *DM este mediană în* $\triangle BCD$ *(2)*........................................................2p.

*3). Fie* $O\in(BD)$ *astfel încât BO=DO* $\Rightarrow$ *CO este mediană în* $\triangle BCD$. *Din ipoteză BM=MC* $\Rightarrow$ *MO este linie mijlocie în* $\triangle BCD \Rightarrow MO\parallel CD\parallel AB$ *ŞI* $MO=\dfrac{CD}{2}=AB \Rightarrow MO\parallel AB \Rightarrow$ *ABMO este paralelogram,* $\Rightarrow$ *AM=CO (3)*......................................................................................................2p.

*Din relaţiile (1), (2) şi (3)* $\Rightarrow$ *MA=CO, MD=MD, AD=BE, unde CO,MD,BE sunt medianele triunghiului BCD.* ..........................................................................................................1p.

**Subiectul 3.**

SOLUŢIE

1). *Din* $\dfrac{x_1}{1}=\dfrac{x_2}{2}=\dfrac{x_3}{3}=......=\dfrac{x_{2010}}{2010}=k, k\in\mathbb{N} \Rightarrow x_1=k, x_2=2k, x_3=3k,...,x_{2010}=2010k$ .............2p

2). *Atunci* $\dfrac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot...\cdot x_{2010}}{4^{1005}}=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot2010 \Leftrightarrow \dfrac{k^{2010}}{2^{2010}}=1 \Rightarrow k=2$ ..........................................2p

$\Rightarrow x_1=2, x_2=4, x_3=6, ........, x_{2010}=4020$ ..........................................................................1p

3). $M_a=\dfrac{x_1+x_2+x_3+.......+x_{2010}}{2010}=\dfrac{2\cdot(1+2+3+......+2010)}{2010}=\dfrac{2\cdot\dfrac{2010\cdot2011}{2}}{2010}=2011$ .................2p

**Subiectul 4.**

SOLUŢIE

*a).*

*1) D mijloc* $[BC]$ *şi* $A'$ *simetricul lui A faţă de D,* $\Rightarrow$ *D mijlocul segmentului* $[AA'] \Rightarrow$ *patrulaterul* $ABA'C$ *este paralelogram,* $\Rightarrow [A'B]\equiv[AC]$. ...........................................................2p.

*2). În triunghiul* $ABA'$, *avem:* $AA'\angle AB+A'B$, *dar* $AA'=2\cdot AD \Rightarrow 2\cdot AD\angle AB+AC \Rightarrow AD\angle\dfrac{AB+AC}{2}$ ..........................................................................................................2p.

*b).*

*3). În triunghiul* $A'MB$ *avem* $A'M\perp BC \Rightarrow$*,dar* $MD\perp A'B \Rightarrow$ *D este ortocentrul triunghiului* $A'MB$

$\Rightarrow A'A\perp BM$ ..........................................................................................................................2p.

*4). Cum* $A'C\parallel AB$ *(* $ABA'C$ *- paralelogram)* $\Rightarrow AA'\perp A'C \Rightarrow \triangle AA'C$ *este dreptunghic în* $A'$.......1p.