CONCURSUL INTERJUDEŢEAN
"TINERE SPERANŢE"
Ediţia a VII–a, 10 decembrie 2011
Clasa a V–a

PROBA INDIVIDUALĂ

Problema nr. 1

a) Fie numerele $A=4^{35}-\left[8-8\left(5-3125:5:5^3\right):81^{996}-2^3\right]-8^{23}$ şi

$B=\left\{\left[64^3\cdot\left(2^3\cdot 3\right)^{202}\right]:\left(72\cdot 2^{309}\right)^2-3^{198}\right\}^{35}$.

Să se studieze dacă numărul $\left(A-B\right)^{21}-2^{1448}$ este pătrat perfect.

b) Pentru orice număr natural k, notam $f_1(k)$ pătratul sumei cifrelor numărului k, iar pentru $n\geq 2$ notam $f_n(k)=f_1\left(f_{n-1}(k)\right)$. Calculaţi $f_7(20)$ si $f_{2012}(20)$.

Problema nr. 2

a) Într-o cutie sunt numai bile de trei culori: roşii, galbene şi negre. Numai 27 din ele nu sunt negre şi numai 39 nu sunt roşii. Numărul bilelor roşii este de două ori mai mic decât numărul bilelor negre. Câte bile de fiecare culoare sunt în cutie?

b) O pereche de numere naturale (x;y) se numeşte „interesantă" dacă, atunci când calculăm suma x + y nu au loc treceri peste ordin. De exemplu, perechea (24; 43) este „interesantă". Să se calculeze numărul perechilor „interesante" cu suma 43296.

Problema nr. 3

Fie şirul de numere naturale: $1; 2\cdot 3; 4\cdot 5\cdot 6; 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10;...$

a) Să se determine al 7-lea şi al 100-lea termen al şirului.

b) În câte zerouri se termină al 100-lea termen?

Problema nr. 4

a) Rezolvaţi ecuaţia $144+144\cdot 49+144\cdot 49^2+144\cdot 49^3+...+144\cdot 49^{2011}=3\cdot\left(x^{4024}-1\right)$

b) Arătaţi că 35 divide numărul $49^{2011}-49$.

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii. Se cer redactări complete.
Fiecare problemă valorează 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.
Subiectele au fost selectate de prof. Ella Ilie - Şcoala „N. Iorga" Baia Mare

Problema nr. 1 BAREM DE CORECTARE

Solutie:

a) calcul paranteză rotundă...0,5 p

calcul paranteză pătrată...0,5p

calcul $A = 2^{69}$ ....0,5 p

scrierea numerelor 64 şi 72 ca puteri ale lui 2, respectiv 3..............0,5 p

aplicarea proprietăţii puterea unei puteri.......................................0,5p

determinare B = 0 ....0,5p

numărul cerut se scrie sub forma $\left(2^{724}\right)^2$, deci numărul este pătrat perfect....1p

b) $f_1(20) = (2+0)^2 = 2^2 = 4$ 0,5p

$f_2(20) = f_1(f_1(20)) = f_1(4) = 4^2 = 16$

$f_3(20) = f_1(f_2(20)) = f_1(16) = (1+6)^2 = 7^2 = 49$

$f_4(20) = f_1(f_3(20)) = f_1(49) = (4+9)^2 = 13^2 = 169$

$f_5(20) = f_1(f_4(20)) = f_1(169) = (1+6+9)^2 = 16^2 = 256$ 1p

$f_6(20) = f_1(f_5(20)) = f_1(256) = (2+5+6) = 13^2 = 169$

$f_7(20) = f_1(f_6(20)) = f_1(169) = 256$

Observam ca pentru n par si mai mare sau egal decat 4, $f_n(20) = 169$*, iar pentru n impar si mai mare sau egal decat 5,* $f_n(20) = 256$ *1p*

Cum 2012 este un numar par mai mare decat 4, deducem ca $f_{2012}(20) = 169$ *0,5p*

Problema nr. 2 ***Soluţie***

a) *Identificarea necunoscutelor şi punerea problemei în ecuaţie..........................1p*

Determinarea numărului de bile roşii, r = 12......................................1p

Determinarea numărului de bile negre, n = 24 şi bile galbene g = 15...........1p

b) *Numerele x şi z vor fi de forma* $x = \overline{abcde}; y = \overline{mnpqr}$ *0,5p*

Din x+y=43296, fără trecere peste ordin obţinem

$a+m=4; b+n=3; c+p=2, d+q=9; e+r=6$ *1p*

Din $a+m=4 \Rightarrow (a;m) \in \{(0;4),(1;3),(2;2),(3;1),(4;0)\} \Rightarrow (\exists)5$ *posibilităţi*

Analog tratăm celelalte cazuri..1,5p

Numărul perechilor este $5\cdot4\cdot3\cdot10\cdot7 = 4200$ *posibilităţi..................1p*

Problema nr. 3

Soluţie: ***a)*** *Al 7-lea termen al şirului,* a_7*, va fi format din 7 factori şi ultimul factor va fi egal cu* $1+2+3+...+7 = 28 \Rightarrow a_7 = 22\cdot23\cdot24\cdot...\cdot28$ *2p*

Al 100-lea termen al şirului, a_{100}*, va fi format din 100 factori şi ultimul factor va fi* $1+2+3+...+100 = 5050 \Rightarrow a_{100} = 4951\cdot4952\cdot...\cdot5050$ *2p*

b) *Numărul de zerouri în care se termină produsul primelor 5050 numere este:*

$$\left[\frac{5050}{5}\right]+\left[\frac{5050}{25}\right]+\left[\frac{5050}{125}\right]+\left[\frac{5050}{625}\right]+\left[\frac{5050}{3125}\right] = 1010+202+40+8+1 = 1261$$ *1p*

Numărul de zerouri în care se termină produsul primelor 4950 numere este:

$$\left[\frac{4950}{5}\right]+\left[\frac{4950}{25}\right]+\left[\frac{4950}{125}\right]+\left[\frac{4950}{625}\right]+\left[\frac{4950}{3125}\right] = 990+198+39+7+1 = 1235$$ *1p*

Termenul al 100-lea se termină în 1261-1235=26 de zerouri.......................1p

Problema nr. 4 ***Soluţie***

a) *se dă factor comun numărul 144............................1p*

obţinerea rezultatului $48S = 49^{2012} - 1$ *1p*

scrierea ecuaţiei sub forma $3\cdot48S = 3\left(x^{4024}-1\right)$ *1p*

obţinerea soluţiei $x = 7$ *1p*

b) *justificare că 7 divide numărul dat........................1p*

justificare că 5 divide numărul dat........................1p

finalizare....................................1p.