ŞCOALA CU CLASELE I-VIII „NICOLAE IORGA BAIA MARE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„TINERE SPERANŢE” - Ediţia a VII-a

Clasa a VII-a

Proba individuală
10 decembrie 2011

Subiectul 1. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia:

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{2011}{1006}$$

Subiectul 2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Fie D mijlocul laturii $[BC]$, M mijlocul segmentului $[AD]$ şi N piciorul perpendicularei din D pe BM. Să se arate că $m(\sphericalangle ANC) = 90^0$.

Subiectul 3. Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât:

$$\frac{3\cdot x^2+2\cdot x+5}{3\cdot|x|+2}\in\mathbb{Z}.$$

Prof. Boloş Mihai

Subiectul 4. Să se arate că oricum am aşeza 50 de puncte în interiorul unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1, există cel puţin două puncte astfel încât distanţa dintre ele să nu depăşescă $\frac{1}{7}$

Timp de lucru 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7p.

SUCCES !

Subiectul 1. SOLUŢIE **Bareme:**

1). *Ecuaţia dată este echivalentă cu:*

$$1+\frac{1}{\frac{2\cdot(2+1)}{2}}+\frac{1}{\frac{3(3+1)}{2}}+......+\frac{1}{\frac{x\cdot(x+1)}{2}}=\frac{2011}{1006}$$ 1p

2). $\Leftrightarrow 1+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+......+\frac{2}{x\cdot(x+1)}=\frac{2011}{1006}\Leftrightarrow$ 1p

3). $\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+......+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)=\frac{2011}{1006}\Leftrightarrow$ 1p

4). $\Leftrightarrow 2\cdot\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+......+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right]=\frac{2011}{1006}\Leftrightarrow$ 2p

5). $\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x}\right)=\frac{2011}{1006}\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)=\frac{2011}{1006}\Leftrightarrow$ 1p

6). $\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1}=\frac{2011}{1006}\Rightarrow x=2011.$ 1p

Subiectul 2.

SOLUŢIE

1). *Construim paralelogramul ABDS, rezultă atunci că ADCS este dreptunghi şi notăm cu R intersecţia diagonalelor sale* 2p

2). În triunghiul dreptunghic *DNS segmentul* $[NR]$ *este mediană corespunzătoare ipotenuzei,* $\Rightarrow$ $NR=\frac{1}{2}\cdot SD=\frac{1}{2}\cdot AC.$ 2p

3). *Deorece R este mijlocul segmentului* $[AC]$ *şi* $[NR]=\frac{1}{2}\cdot AC$*, deducem că triunghiul ANC este dreptunghic în N, ceea ce trebuia arătat.* 3p

Subiectul 3. SOLUŢIE

1). $\frac{3\cdot x^2+2\cdot x+5}{3\cdot|x|+2}\in\mathbb{Z}.\Leftrightarrow(3|x|+2)\,\Big|\,3x^2+2x+5$ 1p

2). *Din explicitarea modulului avem:CazulI* $x\geq 0,\Rightarrow\ |x|=x$ *şi Cazul II* $x<0\Rightarrow|x|=-x$ 1p

3). *CazulI* $x\geq 0,\Rightarrow|x|=x\ \Rightarrow\ 3x+2\,\Big|\,3x^2+2x+5$

$$\left.\begin{array}{l}3x+2|3x^2+2x+5\\3x+2|3x+2\Rightarrow 3x+2|3x^2+2x\end{array}\right\}\Rightarrow 3x+2|5\Rightarrow 3x+2\in D_5\Rightarrow 3x+2\in\{-5,-1,1,5\}\Leftrightarrow$$

$3x\in\{-7,-3,-1,3\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{7}{3},-1,-\frac{1}{3},1\right\}$ 1,5p

4). *Din* $x\in\mathbb{Z}$ şi $x\geq 0\Rightarrow x\in\{1\}\Rightarrow x=1$ 1p

5). *Cazul II* $x<0\Rightarrow|x|=-x\Rightarrow -3x+2|3x^2+2x+5$

$$\left.\begin{array}{l}-3x+2|3x^2+2x+5\\-3x+2|-3x+2\Rightarrow -3x+2|-3x^2+2x\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-3x+2|4x+5\Rightarrow -3x+2|12x+15\\-3x+2|-3x+2\Rightarrow -3x+2|-12x+8\end{array}\right\}\Rightarrow -3x+2|23$$

$\Rightarrow -3x+2\in\{-23,-1,1,23\}\Rightarrow -3x\in\{-25,-3,-2,21\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{25}{3},1,-\frac{2}{3},-7\right\}$ 1,5p

6). *Din* $x\in\mathbb{Z}$ şi $x\angle 0\Rightarrow x\in\{-7\}\Rightarrow x=-7$ 1p

Subiectul 4. SOLUŢIE

1). Împărţim fiecare latură a triunghiului echilateral în 7 segmente egale cu $\frac{1}{7}$ *şi ducem paralele la celelalte laturiprin punctele de diviziune, obţinând 1+3+5+7+9+11+13 = 49 de triunghiuri echilateralecu laturile de lungime* $\frac{1}{7}$ *3p*

2). Dacă aşezăm cele 50 de puncte în interiorul triunghiului mare, oricum am aşeza aceste puncte va exista un triunghi mic în ineriorul căruia să fie cel puţin două puncte......3p

3). Cum lungimea laturii unui triunghi mic este de $\frac{1}{7}$*, rezultă că distanţa dintre ele nu va depăsi* $\frac{1}{7}$ 1p