Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VI - a, Bistrița
18 - 20 noiembrie 2011

Clasa a VII-a

1. a) Să se determine valorile naturale ale lui n, pentru care fracția $\frac{2n-1}{9n+4}$ se poate simplifica.
b) Arătați că nu există numere naturale nenule$x,\ y,\ z$ pentru care $x^2 + y^2 = 7 \cdot (x, z)$ și $x^2 + z^2 = 7 \cdot (x, y)$. (am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b).

2. Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația:
a) $\sqrt{x^2 - y}$= 4 - x^2.
b) Să se afle $n \in \mathbb{N}^*$, știind că fracțiile: $\frac{n+1}{3n^2+2n}$ și $\frac{10}{261}$ sunt echivalente.

3.Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E, F, O, M, P și N astfel încât: $E \ \epsilon \ (AB)$,$F \ \epsilon (AB)$, $AE = FB = \frac{AB}{4}$; $\{O\} = AC \ \cap BD$; $DE \cap FC = \{M\}$; $MO \cap AB = \{P\}$; $DP \cap MB = \{N\}$ și $AB = 12$ cm.

a) Aflați lungimea segmentului (PE).

b) Arătați că patrulaterul $MNOE$ este paralelogram.

c) Dacă $BC = AM = \frac{AB}{2}$, arătați că dreptele BD și BC sunt perpendiculare, iar triunghiul NOE este echilateral.

Clasa a VIII-a

1.Fie x, y numere raționale nenule. Arătați că dacă $\frac{x\sqrt{5}+y\sqrt{3}}{y\sqrt{5}+x\sqrt{3}}$ este număr rațional, atunci$|x|= |y|$.

2. a) Să se determine numerele naturale n, pătrate perfecte, pentru care

$$1 + 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot ... \cdot \left(2^{2^n} + 1\right) < 2^{2011}.$$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^{4^n} + y^{4^n} = 2011$, unde $n \ \epsilon \ \mathbb{N}$.

3.Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și punctele M și N proiecțiile punctului A pe bisectoarea unghiului ABD' și, respectiv, pe bisectoarea unghiului $AB'D'$.

i) Arătați că:

a) $MN \ \perp AC$;

b) Dreptele AA' și MN sunt necoplanare.

ii) Câte plane egal depărtate de punctele M, N, A și A' există? Justificați.