Concursul „Sfinx XXI”, ediția a VI-a
Mărişelu, 03 decembrie 2011

Soluții - Clasa a VII-a

1. Din ***x(x-y)*** ≥ 0 şi *x este numar natural* se obține ***x-y*** ≥ 0 , de aici se obține **x**$\geq y$

Dacă:

$$\sqrt{x\cdot(x-y)}=6$$

atunci : $x\cdot(x-y)=36$

$x^2-xy\geq 0$

Ştim că $36 = 18\cdot 2$

$36 = 9\cdot 4$

$36 = 12\cdot 3$

$36 = 36\cdot 1$

$36 = 6\cdot 6$ se obțin cazurile:

Din x =18 şi x – y = 2, obținem: y =16

Din x = 9 şi x – y = 4, obtinem: y = 5

Din x =12 şi x – y = 3, obtinem: y = 9

Din x =36 şi x – y = 1, obtinem: y = 35

Din x = 6 şi x – y = 6, obtinem: y =0.

Concluzie: soluțiile obținute sunt: (x;y)$\in\big((18;16\big);(9;5);(12;9);(36;35);(6;0)\}$

2. Se elimină parantezele , se aplică în mod convenabil proprietatea de comutativitate a adunării şi grupând convenabil termenii rezultă:

$$A+B=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+...+\frac{97}{98}+\frac{1}{98})-(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}+...+\frac{99}{100}+\frac{1}{100})=25-25=0$$

2. Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB din Δ**ABC. O**bținem: Δ**APN ≡** Δ**BPM ≡** Δ**CMN ≡** Δ**PMN ,** conform cazului LLL. Prin acelaşi procedeu fiecare din cele 4 triunghiuri se vor împărți fiecare în câte alte 4 triunghiuri congruente, se obțin 4^2 triunghiuri congruente. În continuare fiecare din cele 4^2 triunghiuri congruente se va împărți în câte 4 triunghiuri congruente, rezultă 4^3 triunghiuri congruente. Procedeul se continuă, până obținem 4^7 = 16384 triunghiuri congruente.

Concursul „Sfinx XXI”, ediția a VI-a
Mărişelu, 03 decembrie 2011

Soluții - Clasa a VIII-a

1.

a) $\frac{^{x)}1}{x-3} - \frac{^{x-3)}1}{x} = \frac{x-x+3}{(x-3)\cdot x} = \frac{3}{(x-3)\cdot x}$.

b) Se observă că termenii lui **3n** sunt de forma $\frac{3}{(x-3)\cdot x}$.

În aceste condiții putem scrie: $3\cdot n = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \frac{3}{7\cdot 10} + ... + \frac{3}{97\cdot 100} =$

$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

2. Calculăm numitorul:

$\sqrt{2011} \approx 44{,}8 \Rightarrow \left[\sqrt{2011}\right] = 44$

$\left\{-\frac{1}{5}\right\} = (-\frac{1}{5}) - \left[-\frac{1}{5}\right] = -\frac{1}{5} - (-1) = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$

Numitorul devine:

$\left[\sqrt{2011}\right] - 2{,}5 \cdot \left\{-\frac{1}{5}\right\} = 44 - 2{,}5 \cdot \frac{4}{5} = 44 - \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} = 42.$

Rezultatul: 168 : 42 = 4.

3. In ΔABC, ducem ED || AB, E $\in$ (AC), rezultă $\angle DAB \equiv \angle ADE$ (i)
Fiindcă AD-bisectoare, avem $\angle DAB \equiv \angle DAC$ (ii). Din (i) şi (ii) rezultă că:
$\angle DAE \equiv \angle ADE$, deci ΔADE este dreptunghic şi isoscel.
Deoarece AD = $3\sqrt{2}$ cm, avem AE = DE = 3 cm.

ΔCDE ΔCBA (DE|| AB), rezultă: $\frac{CE}{CA} = \frac{DE}{AB}$, de unde CA = 12 cm.
Folosindu-ne de datele obținute, rezultă BC = $4\sqrt{10}$, de aici rezultă că perimetrul este egal cu: 16 + $4\sqrt{10}$ şi aria = 24 cm^2.