Concursul Interjudețean de Matematică „Academician Radu Miron”
Vaslui, 11-13 noiembrie 2011

Subiecte clasa a VII-a

1. Fie în exteriorul triunghiului ascuțitunghic *ABC*, triunghiurile dreptunghice *ABP* şi *ACT* cu ipotenuzele (*AB*) şi (*AC*). Dacă unghiurile *PAB* şi *TCA* sunt complementare iar *M* este mijlocul lui (*BC*), să se arate că (*PM*) ≡ (*MT*).

2. Arătați că ecuația $x^2 + 67y = 2010$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor întregi.

(G.M.)

3. Fie A o mulțime cu 2011 elemente. Să se arate că există $B = \{x_1, x_2, ..., x_{2010}\} \subset A$, astfel încât: $2^{1005} \times 1005! \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) .... (x_{2009} - x_{2010})$.

(*)

Subiecte clasa a VIII-a

1. Fie trapezul *ABCD* cu $AB \parallel CD$ şi $AB = 2CD$. Dacă *M* este mijlocul lui [*AB*], *N* este mijlocul lui [*BC*], $AN \cap DM = \{P\}$ şi $AN \cap CM = \{T\}$, determinați valoarea raportului dintre aria triunghiului *MPT* şi a trapezului *ABCD.*

2. Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care numărul $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ este rațional.

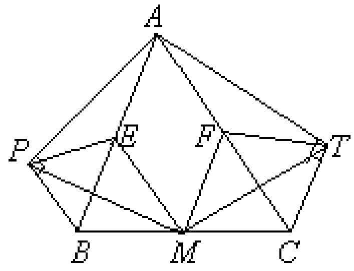
(*)

3. Să se arate că: $xy - 2x - 2y + 5 > 0$, oricare ar fi $x, y \in (1,3)$.

(G.M.)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
În situație de egalitate problema notată cu (*) este considerată de departajare.

SOLUȚII CLASA a VII-a



1. Dacă E şi F sunt mijloacele laturilor (AB) respectiv (AC), avem că $AEMF$ este paralelogram. Întrucât $[PE]$ este mediană în $\triangle APB$, (2p) atunci $(PE) \equiv (EA) \equiv (FM)$, la fel $[TF]$ este mediană în $\triangle ACT$ şi $(TF) \equiv (FA) \equiv (EM)$. (2p)

Dacă unghiurile PAB şi TCA sunt complementare, atunci $\angle(PAB) \equiv \angle(TAC)$. (2p)

Atunci $m\angle(PEB) = 2m\angle(PAB) = m\angle(CFT)$ şi $m\angle(BEM) = m\angle(BAC) = m\angle(CFM)$.

Deci $m\angle(PEM) = m\angle(TFM)$, de unde $\triangle PEM \equiv \triangle MFT$ şi $(PM) \equiv (MT)$. (1p)

2. Din relația dată rezultă că $x^2 \vdots 67 \Rightarrow x \vdots 67$ (2p)

Deci $x = 67k,\ k \in \mathbb{Z}$ (2p)

$67^2 \cdot k^2 + 67y = 30 \cdot 67$ (2p)

$67 \cdot k^2 + y = 30$, $k \in \mathbb{Z}$ deci ecuația are o infinitate de soluții întregi. (1p)

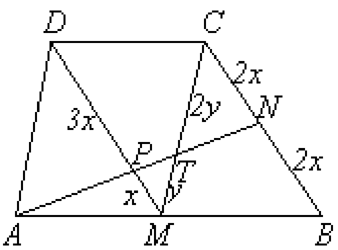
3. Din principiul cutiei observăm că printre cele 2011 elemente ale lui A există două care dau aceleși rest la împărțirea prin 2010; fie x_1, x_2 aceste elemente. Deducem că $2010 | (x_1 - x_2)$ (1). (2p)

Pe același principiu, printre cele 2009 elemente ale mulțimii $A - \{x_1, x_2\}$ există două care dau același rest la împărțirea prin 2008; fie x_3, x_4 aceste elemente. Deducem că $2008 | (x_3 - x_4)$ (2). (2p)

Similar, la ultimul pas avem că printre cele 3 elemente ale mulțimii $A - \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_{2008}\}$ există două cu diferența divizibilă cu 2, deci $2 | (x_{2009} - x_{2010})$ (1005). (2p)

Astfel, înmulțind relațiile (1), (2), …….,(1005) obținem că $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots\ldots .2010) | (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots\ldots\ldots .(x_{2009} - x_{2010})$. (1p)

CLASA a VIII-a



1. Pentru că M este mijlocul lui $[AB]$ şi $AB = 2CD$, patrulaterele $AMCD$ şi $MBCD$ sunt paralelograme, (2p)

cu $A_{[AMD]} = A_{[DMC]} = A_{[MBC]} = \frac{1}{3} A_{[ABCD]}$. (1p)

Pentru că $MP \| BN$ avem $\Delta AMP \sim \Delta ABN \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MP}{BN} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow BN = 2MP$ şi $DP = 3x$. (2p)

Pentru că $MP \| NC$ avem $\Delta MTP \sim \Delta CTN \Rightarrow \frac{MP}{CN} = \frac{MT}{TC} = \frac{1}{2} \Rightarrow TC = 2MT$.

$$A_{[MPT]} = \frac{MP \cdot MT \cdot \sin\angle(PMT)}{2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot MD \cdot \frac{1}{3} \cdot MC \cdot \sin\angle(PMT)}{2} = \frac{MD \cdot MC \cdot \sin\angle(PMT)}{24} = \frac{1}{12} \cdot A_{[DMC]} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{[ABCD]} = \frac{1}{36} \cdot A_{[ABCD]}.$$ (2p)

2. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ cu b nenul și (a,b)=1, astfel încât $\frac{4n-2}{n+5} = \frac{a^2}{b^2}$. (2p)

Atunci $a^2 n + 5a^2 = 4b^2 n - 2b^2$ de unde rezultă că : $n = -5 + \frac{22b^2}{4b^2 - a^2}$. (2p)

Cum $n \in \mathbb{Z}$, trebuie ca $(4b^2 - a^2) | 22b^2$, ceea ce împreună cu faptul că $(b^2, 4b^2 - a^2) = 1$, implică $(4b^2 - a^2) | 22$. Mai mult, $4b^2 - a^2$ este un număr de forma 4k sau 4k+3, deci $4b^2 - a^2 \in \{-1, 11\}$. (2p)

Dacă $4b^2 - a^2 = -1$, obținem b=0, ceea ce este imposibil. Deci $4b^2 - a^2 = 11$, de unde a=5, b=3, iar n=13. (1p)

3. Relația dată se scrie $(x-2)(y-2) + 1 > 0$. (2p) Din $x \in (1,3)$ rezultă că $-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow |x-2| < 1$.

Din $y \in (1,3)$ rezultă că $-1 < y - 2 < 1 \Rightarrow |y-2| < 1$. (2p)

Deci $0 < |x-2| \cdot |y-2| < 1$. (2p)

$0 < |(x-2) \cdot (y-2)| < 1$ de unde rezultă concluzia. (1p)