

Concursul interjudețean de matematică „Regina Maria” ediția V-a
22 noiembrie 2008
clasa VII-a

1. Se consideră suma $S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$ $n \geq 2$

- a) Arătați că $S_n > 2$, pentru orice $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$.
- b) Arătați că $S_n < 3$, pentru orice $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$.
- c) Scrieți S_9 sub forma $\frac{p}{q}$ cu $p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}, (p,q)=1$ apoi arătați că q nu se divide cu 5.

Prof. Mihai Popa

2. Se dă trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, unde M și N sunt mijloacele laturilor [AD], respectiv [BC]. Dacă P este piciorul perpendicularei dusă din D pe dreapta AB, iar E și F intersecțiile dreptelor BD și AC cu MN, demonstrați că :

- a) ABCD este trapez isoscel dacă și numai dacă EFAP este paralelogram.
- b) Dacă $AD=BC$, $PF \cap AE = \{O\}$ și $MB \cap AE = \{S\}$, arătați că $6 \cdot SO = AE$.

Prof. Simona Dumitrescu

3. a) Să se determine $A = \{(x,y) / xy - y - 3x = 2, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$

b) Să se arate că fracția $\frac{9a+8}{8a+7}$ este ireductibilă pentru orice $a \in \mathbf{N}$.

c) Să se determine $x \in \mathbf{N}$ de forma $x = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ știind că $x < 50$ și că numărul de divizori pe \mathbf{N} a lui x este 6.

Prof. Pavel Toader

4. Se consideră triunghiul ABC, $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle C) = 30^\circ$, $AB = a$, $AC = b$. Mediana [AD] se prelungește cu un segment [DN] \equiv [AD], iar latura [AB] cu [BS] \equiv [BC]. Fie M punctul de intersecție al bisectoarei unghiului ABC cu CN. Se cere:

- a) Să se arate că ABNC dreptunghi.
- b) Să se arate că punctele S, D, M coliniare
- c) Să se calculeze aria lui ASNM în funcție de a și b.

Prof. Mioara Ghiță

Notă : - Fiecare problemă se notează cu 7 puncte
- Timp de lucru 2 ore.