

Clasa a V-a

1. Se dau numerele:

$$x = \{27 + [36 - (28 - 175 : 25) : 7] \cdot 4\} : 159 ;$$

$$y = (2011^{2012} : 2011^{2011} : 2012^0)^0 - (125 \cdot 11111^3 - 55555^3) ;$$

$$a = 3 + (3^x)^2 + 3^{x+y} + (3^y)^2 - 3^{x \cdot y} .$$

(4p) a) Calculați numerele x și y .

(3p) b) Arătați că numărul a^{2011} este cub perfect.

Liviu Ardelean

2. Se consideră următorul tablou în care linia n conține n numere:

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
.....				

(3p) a) Calculați suma numerelor din primele 5 linii ale tabloului.

(4p) b) Determinați primul element de pe linia 100.

Monica Pau

3. Numărul $x = \overline{ab}$ este format din primele două numere prime.

(3p) a) Arătați că x nu este pătrat perfect.

(4p) b) Dacă $n = a \cdot k + b$, $a < b$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $a^n + a^{2k}$ este pătrat perfect.

Cornel Țichindelean

4. (7p) Determinați mulțimile A și B , știind că satisfac simultan condițiile:

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

2) $A \cap B = \{3, 4\}$;

3) $A \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$;

4) $\{1, 2\} \cap B \neq \emptyset$.

Gazeta Matematică

Clasa a VI-a

1. (7p) Determinați numărul natural nenul n , știind că 2010 împărțit la $2n$ dă restul 10, 2011 împărțit la $3n$ dă restul 61 și 2012 împărțit la $5n$ dă restul 12.

Viorica David

2. (7p) Calculați suma: $S = 2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \dots + \frac{1025}{1024}$

Gazeta Matematică

3. Se dau punctele coliniare $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$, astfel încât $A_0A_1 = 1cm, A_1A_2 = 2011 \cdot A_0A_1, A_2A_3 = 2011 \cdot A_1A_2, \dots, A_nA_{n+1} = 2011 \cdot A_{n-1}A_n$.

(3p) a) Calculați lungimea segmentului $[MN]$, unde M este mijlocul segmentului $[A_1A_2]$ și N este mijlocul segmentului $[A_2A_3]$.

(4p) b) Aflați n pentru care $2010 \cdot A_1A_{n+1} + 2011 \cdot A_0A_1 = 2011^{2012}$.

Monica Guita

4. Unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle COB$ sunt adiacente suplementare, iar punctele C și D sunt de o parte și de cealaltă a dreptei AO , astfel încât $m(\sphericalangle COD) = 100^\circ$ și $m(\sphericalangle BOD) = 3 \cdot m(\sphericalangle AOC) < 180^\circ$. Aflați:

(4p) a) Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COB$ și $\sphericalangle BOD$.

(3p) b) Măsura unghiului format de bisectoarea $\sphericalangle AOD$ și semidreapta opusă semidreptei $[OC]$.

Doina Tatu

Clasa a VII-a

1. (3p) a) Arătați că:
$$\frac{2^{n-1}}{(2^n + 1) \cdot (2^{n+1} + 1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^n + 1} - \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right).$$

(4p) b) Aflați numărul natural nenul n , astfel încât:

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 17} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(2^n + 1) \cdot (2^{n+1} + 1)} = \frac{2^{2010} - 1}{3 \cdot (2^{2011} + 1)}.$$

Gazeta Matematică

2. (3p) a) Comparați numerele reale: $a = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$ și $b = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{8}}.$

(4p) b) Se dă suma:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 10 + \dots + (5n - 4) + (5n - 3) + (5n - 2) + (5n - 1) - 5n.$$

Determinați numărul natural n pentru care $S = 175.$

Simona Dumitrescu

3. (7p) Medianele $[CE]$ și $[BD]$ ale triunghiului ABC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) se intersectează în $G.$ Dacă $BC = 15\text{cm}$ și $AG \cap ED = \{P\},$ calculați lungimile segmentelor AG și $PG.$ ***

4. $ABCD$ este un paralelogram, M și N două puncte pe latura $[BC],$ astfel încât $BM = MN = NC,$ iar P un punct pe latura $[CD],$ astfel încât $CP = PD.$ Dacă $AM \cap CD = \{E\}, AN \cap CD = \{F\}, AP \cap BC = \{G\},$ demonstrați că:

(3p) a) $NP \parallel MD$ și $BP \parallel GF.$

(2p) b) GE nu este paralelă cu $MD.$

(2p) c) dreptele AN, BP și DM sunt concurente într-un punct $O.$

Teodor Mărcuț

Clasa a VIII-a

1. Se consideră expresia $E(a, b) = a^4 + b^4 + (a + b)^4,$ unde $a, b \in \mathbb{N}.$

(4p) a) Demonstrați că $2E(a, b)$ este pătrat perfect.

(3p) b) Arătați că $E(a, b) \geq 18a^2b^2.$ ***

2. (7p) Determinați numerele naturale $\overline{aba},$ știind că $\sqrt{\overline{abc}} = \overline{ab} - \sqrt{a}.$ *Gazeta Matematică*

3. $ABCD$ este un tetraedru și G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAC respectiv $DAB.$

(4p) a) Demonstrați că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC).$

(3p) b) Calculați raportul dintre ariile triunghiurilor $G_1G_2G_3$ și $ABC.$ ***

4. $ABCD$ este un paralelogram cu $m(\hat{A}) = 60^\circ, AD = 6\text{cm}, DB \perp AD$ și M este mijlocul laturii $[AB].$ În punctul $P, DB \cap CM = \{P\},$ se ridică perpendiculara PQ pe planul paralelogramului $ABCD,$ astfel încât $PQ = 2\sqrt{6}\text{cm}.$

(2p) a) Aflați aria paralelogramului $ABCD.$

(5p) b) Calculați distanțele de la punctul Q la punctul $C,$ respectiv la dreapta BC

Gheorghe Floarea