Barem de corectare OLM Clasa a VIII-a, 2011

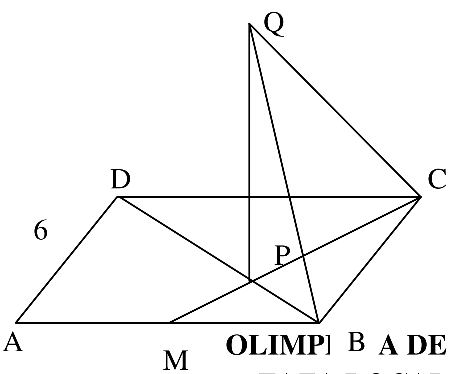
1. a) $E(a,b) = 2(a^4 + b^4 + 3a^2b^2 + 2a^3b + 2ab^3)$ ……………………..…………………(2p)
$2E(a,b) = [2(a^2 + b^2 + ab)]^2$……………………………………………………………..(2p)
b) $a^2 + b^2 + ab \geq 3ab$ ....(1p)
$(a^2 + b^2 + ab)^2 \geq 9a^2b^2 \Rightarrow E(a,b) \geq 18a^2b^2$ ……………………..…………………(2p)

2. Prin ridicare la pătrat avem $\overline{abc} = \overline{ab}^2 - 2\overline{ab}\sqrt{c} + c$ ....(1p)
$10\overline{ab} + c = \overline{ab}^2 - 2\overline{ab}\sqrt{c} + c \Rightarrow 10 + 2\sqrt{c} = \overline{ab}$...(1p)
$c \in \{0,1,4,9\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{10,12,14,16\}$ ....(4p)
$\overline{abc} \in \{100,121,144,169\}$ ....(1p)

3. a) Fie M, N, P, mijloacele laturilor $[BC], [AB]$ respectiv $[AC]$
G_1, G_2, G_3 centre de greutate $\Rightarrow \frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DP} = \frac{DG_3}{DN} = \frac{2}{3}$ ....(2p)
$\frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DP} = \frac{DG_3}{DN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel PM$ şi $G_1G_3 \parallel MN \Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$..........................(2p)
b) $\frac{A_{MNP}}{A_{ABC}} = \frac{1}{4}$...(1p)
$\frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{MNP}} = \frac{4}{9}$..(1p)
$\frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{ABC}} = \frac{A_{G_1G_2G_3}}{4A_{MNP}} = \frac{1}{9}$..(1p)

4. a) $\Delta ADB\ dr \Rightarrow AB = 12cm$...(1p)
$A_{ABCD} = 6 \cdot 12 \cdot \sin 60 = 36\sqrt{3}cm^2$...(1p)
b) Se arată că $PB = \frac{DB}{3} = 2\sqrt{3}cm$...(1p)
$\Delta CPB\ dr \Rightarrow CP = 4\sqrt{3}cm$...(1p)
$d(Q,C) = QC = 6\sqrt{2}cm$...(1p)

Din teorema celor trei perpendiculare deducem că $QB \perp BC$, deci $d(Q,BC) = QB = 6cm$..
..................**(2p)**



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 12.02.20011

Barem de corectare OLM Clasa a V-a, 2011

1. a) $x=\{27+33\cdot 4\}:159 \Rightarrow x=1$ ....**(2p)**

$y=1-\left(5^3\cdot 11111^3-55555^3\right)\Rightarrow y=1$ ....**(2p)**

b) $a=3+3^2+3^2+3^2-3^{1:1} \Rightarrow a=27=3^3 \Rightarrow a^{2011}=\left(3^3\right)^{2011}=\left(3^{2011}\right)^3$, deci a este cub perfect ....**(3p)**

2. a) Elementele liniei a 5-a sunt: 11, 12, 13, 14, 15 ....**(1p)**

S = 1 + 2 + 3 + ... + 15 = $\dfrac{15(15+1)}{2}=120$ ....**(2p)**

b) Urmărind ultimul număr al fiecărei linii se obţine:

prima linie se termină în 1

a doua linie în 3 = 1 + 2

a treia linie în 6 = 1 + 2 + 3 ....**(1p)**

----

a n -a linie se va termina cu numărul $1+2+..+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ....**(1p)**

a 99-a linie se va termina cu numărul $1+2+...+99=\dfrac{99\cdot 100}{2}=4950$.....**(1p)**

Deci, primul element al liniei 100 este 4951 ....**(1p)**

3. a) $x\in\{23,32\}$ ....**(2p)**

x nu poate fi pătrat perfect ....**(1p)**

b) $n=2k+3$ ....**(1p)**

$a^n+a^{2k}=2^{2k+3}+2^{2k}=2^{2k}(8+1)=\left(2^k\cdot 3\right)^2$ ....**(3p)**

4. Din condiţia 2) $\Rightarrow 3;4\in$ A şi $3;4\in$ B ....**(1p)**

Din condiţiile 3) şi 1) $\Rightarrow 5;6;7\notin$ A şi $5;6;7\in$ B ....**(2p)**

Din condiţia 1) deducem că mai avem de rezolvat problema elementelor 1 şi 2; 1 şi 2 nu pot fi în ambele mulţimi (se contrazice condiţia 2)), dar cel puţin unul dintre ele trebuie să se afle în B (vezi condiţia 4)) ....**(1p)**

Avem posibilităţile:

A = $\{2,3,4\}$, B = $\{1,3,4,5,6,7\}$ ....**(1p)**

A = $\{1,3,4\}$, B = $\{2,3,4,5,6,7\}$ ....**(1p)**

A = $\{3,4\}$, B = $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ....**(1p)**

Barem de corectare OLM Clasa a VI-a, 2011

1. $2010 = 2n \cdot a + 10,\ 2n > 10,\ 2011 = 3n \cdot b + 61,\ 3n > 61,\ 2012 = 5n \cdot c + 12,\ 5n > 12$......**(2p)**

Avem $a, b, c, n \in N,\ n > 20,\ \begin{cases} 2000 = 2n \cdot a \\ 1950 = 3n \cdot b \\ 2000 = 5n \cdot c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \cdot a = 1000 \\ n \cdot b = 650 \\ n \cdot c = 400, \end{cases}$, $n > 20$ ....**(2p)**

$n|(1000, 650, 400) = 50$, $D_{50} = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$...**(2p)**

$n \in \{25, 50\}$..**(1p)**

2. $S = 2 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} + \frac{8}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1024}{1024} + \frac{1}{1024}$..**(2p)**

$S = 2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{10\ ori} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$..**(2p)**

$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{2^{10}}$..**(2p)**

Finalizare $S = 13 - \frac{1}{2^{10}}$...**(1p)**

3. a) M mijlocul $[A_1A_2] \Rightarrow A_1M = MA_2 = \frac{A_1A_2}{2} = \frac{2011}{2}$ ....**(1p)**

N mijlocul $[A_2A_3] \Rightarrow A_2N = NA_3 = \frac{A_2A_3}{2} = \frac{2011^2}{2}$ ....**(1p)**

$MN = MA_2 + A_2N = \frac{2011}{2} + \frac{2011^2}{2} = 2011 \cdot 1006 = 2023066$...**(1p)**

b) $A_1A_{n+1} = 2011 + 2011^2 + \dots + 2011^n$ ....**(1p)**

$2010 \cdot A_1A_{n+1} = 2011^{n+1} - 2011$ ....**(1p)**

Inlocuind obţinem $n = 2011$..**(2p)**

4. a) Desen...**(1p)**

Dacă notăm m(∢AOC)=x, m(∢AOD)=y, m(∢BOD)=$3x$, avem $x+y=100^\circ$ şi $3x+y=180^\circ$ ....**(1p)**

După calcule $x = 40^0$, $y = 60^0$ ....**(1p)**

m(∢AOC) = 40°, m(∢BOC) = 140°, m(∢BOD) = 120° ....**(1p)**

b) Construcţia bisectoarei [OF şi a semidreptei [OE opuse lui [OC.................................**(1p)**

m(∢AOD) = 60°, m(∢DOE) = 80° ....**(1p)**

m(∢FOE) = 110° ....**(1p)**

Barem de corectare OLM Clasa a VII-a, 2011

1. a) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=\frac{2^{n+1}-2^n}{2\cdot(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$ ....**(3p)**

b) Folosind **a)**, avem: $\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$\frac{2}{5\cdot 9}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)$

...

$\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$ ....**(2p)**

$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 9}+...+\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=\frac{2^n-1}{3\cdot(2^{n+1}+1)}$ ....**(1p)**

Formăm ecuaţia: $\frac{2^n-1}{3\cdot(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2010}-1}{3\cdot(2^{2011}+1)}$, a cărei soluţie este $n = 2010$ ....**(1p)**

2. a) Compararea numerelor a şi b revine la compararea numerele $\sqrt{6}+\sqrt{7}$ şi $\sqrt{5}+\sqrt{8}$, deci a numerelor $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ şi $\sqrt{8}-\sqrt{7}$ ....**(1p)**

Avem

$\sqrt{6}+\sqrt{5}<\sqrt{8}+\sqrt{7}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}\Leftrightarrow\sqrt{6}-\sqrt{5}>\sqrt{8}-\sqrt{7}\Leftrightarrow\sqrt{6}+\sqrt{7}>\sqrt{8}+\sqrt{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}<\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}\Leftrightarrow a<b$ ....**(2p)**

b) $S=1+2+3+4+5+...+5n-2\cdot 5\cdot(1+2+3+...+n)$ ....**(1p)**

$S=\frac{5n\cdot(5n+1)}{2}-\frac{10n\cdot(n+1)}{2}=\frac{5n\cdot(3n-1)}{2}$ ....**(2p)**

$\frac{5n\cdot(3n-1)}{2}=175\Rightarrow n\cdot(3n-1)=70\Rightarrow n=5$ ....**(1p)**

3. G este centrul de greutate al triunghiului ABC, deci $[AG]$ este inclus în mediana $[AA']$...**(2p)**

$AA'=\frac{BC}{2}\Rightarrow AA'=7{,}5cm$ ....**(1p)**

$Ag=\frac{2}{3}\cdot AA'\Rightarrow AG=5cm$ ....**(1p)**

$[ED]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci P este mijlocul segmentului $[AA']$............**(2p)**

$GP=AG-AP\Rightarrow GP=5-3{,}75\Rightarrow GP=1{,}25cm$ ....**(1p)**

4. a) Construcţia figurii ....**(1p)**

În triunghiul MCD, $[NP]$ este linie mijlocie, deci $NP \parallel MD$ ....**(1p)**

$$\left.\begin{array}{l} CN \parallel DA \overset{T.Thales}{\Rightarrow} \dfrac{FC}{CD} = \dfrac{FN}{NA} \\ CF \parallel AB \overset{T.Thales}{\Rightarrow} \dfrac{FN}{NA} = \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{FC}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow FC = CP \ \ (1)$$

$\Delta DPA \equiv \Delta CPG(ULU) \Rightarrow CG = DA = CB$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow BPGF$ este paralelogram, deci $BP \parallel GF$ ....**(1p)**

b)
$$\left.\begin{array}{l} CM \parallel DA \overset{T.Thales}{\Rightarrow} \dfrac{EC}{CD} = \dfrac{EM}{MA} \\ AB \parallel CE \overset{T.Thales}{\Rightarrow} \dfrac{EM}{MA} = \dfrac{CM}{MB} = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{EC}{CD} = 2$$

Presupunând $GE \parallel DM \Rightarrow 2 = \dfrac{EC}{CD} = \dfrac{GC}{CM} = \dfrac{3}{2}$ (contradicţie)..**(2p)**

c) $PF \parallel AB, [PF] \equiv [AB] \Rightarrow ABPF$ este paralelogram. Fie $AF \cap BP = \{O\}$. În triunghiul PBN, $[OM]$ este linie mijlocie, deci $OM \parallel PN$ şi cum de la punctul **a)** avem $DM \parallel PN$, rezultă că punctele *D*, *O* şi *M* sunt coliniare, deci $AN \cap BP \cap DM = \{O\}$...........................**(2p)**