BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care $\dfrac{\sqrt{\dfrac{2011+x}{2011-x}}+\sqrt{\dfrac{2011-x}{2011+x}}}{\sqrt{\dfrac{2011+x}{2011-x}}-\sqrt{\dfrac{2011-x}{2011+x}}}\in\mathbb{Z}$.

(***)

Soluţie. Dacă $y=\sqrt{\dfrac{2011+x}{2011-x}}$, obţinem $\dfrac{y+\dfrac{1}{y}}{y-\dfrac{1}{y}}=\dfrac{y^2+1}{y^2-1}=\dfrac{\dfrac{2011+x}{2011-1}+1}{\dfrac{2011+x}{2011-x}-1}=\dfrac{2\cdot 2011}{2\cdot x}=\dfrac{2011}{x}\in\mathbb{Z}$, 2011 număr prim,

$x\in\{-2011;-1;1;2011\}$ şi cum $x\notin\{-2011;2011\}$, $x\in\{-1;1\}$.

Barem.

$\dfrac{y+\dfrac{1}{y}}{y-\dfrac{1}{y}}=\dfrac{y^2+1}{y^2-1}$ …………………………………………………………	2 p
$\dfrac{\dfrac{2011+x}{2011-1}+1}{\dfrac{2011+x}{2011-x}-1}=\dfrac{2\cdot 2011}{2\cdot x}=\dfrac{2011}{x}\in\mathbb{Z}$ …………………………………………	3 p
2011 număr prim, $x\in\{-2011;-1;1;2011\}$ ………………………………………	1 p
Finalizare $x\in\{-1;1\}$ ………………………………………………………	1 p

2. a) Calculaţi media geometrică a numerelor $49\sqrt{2}$ şi $8\sqrt{2}$.

b) arătaţi că oricare ar fi numărul natural k există x,y numere naturale nenule, astfel încât media geometrică a numerelor 4^{x^2} şi 4^{y^3} este $2^{3^{6k+2}}$.

Huluţă Ecaterina, Suceava

Soluţie. a) $\sqrt{49\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2}}=\sqrt{49\cdot 16}=28$.

b) $\sqrt{4^{x^2}\cdot 4^{y^3}}=2^{3^{6k+2}}\Rightarrow 2^{x^2+y^3}=2^{3^{6k+2}}\Rightarrow x^2+y^3=3^{6k+2}\Rightarrow x^2+y^3=(1+8)\cdot 3^{6k}\Rightarrow x^2+y^3=\left(3^{3k}\right)^2+\left(2\cdot 3^{2k}\right)^3$.

Barem.

a) $\sqrt{49\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2}}=\sqrt{49\cdot 16}=28$ ………………………………………	2 p
b) $\sqrt{4^{x^2}\cdot 4^{y^3}}=2^{3^{6k+2}}$ ………………………………………………	1 p
$2^{x^2+y^3}=2^{3^{6k+2}}\Rightarrow x^2+y^3=3^{6k+2}$ ………………………………………	2 p
$x^2+y^3=(1+8)\cdot 3^{6k}$ ………………………………………………………	1 p
Finalizare $x^2+y^3=\left(3^{3k}\right)^2+\left(2\cdot 3^{2k}\right)^3$ ………………………………	1 p

3. Se dă trapezul $ABCD$ în care $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90°$, $[AB]\equiv[AD]$ şi punctul $E\in(AD)$ astfel încât $[AE]\equiv[DC]$. Punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor $[AC]$ respectiv $[BE]$. Dacă $[DM]\equiv[MN]$ aflaţi măsura unghiului ABE.

Supliment, G. M. Nr. 11/2010

Soluţie. $\Delta ABE\equiv\Delta DAC\,(\text{C.C.})\Rightarrow BE=AC, m(\sphericalangle ABE)=m(DAC)=\alpha$.

$[DM]$ sunt mediană corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic ADC $\Rightarrow DM=\dfrac{AC}{2}=MA=MC$. Analog pentru mediana $[AN]\Rightarrow AN=\dfrac{EB}{2}=NE=NB$. Dar $EB=AC$ și atunci avem $MD=MA=NA=NB$. Cum $MD=MN\Rightarrow MN=MA=NA\Rightarrow\Delta MAN$ echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle MAN)=60°$. Din $NA=NB\Rightarrow\Delta NAB$ isoscel cu baza $[AB]\Rightarrow m(\sphericalangle NAB)=m(\sphericalangle NBA)=\alpha$. Dar $m(\sphericalangle DAC)+m(\sphericalangle MAN)+m(\sphericalangle NAB)=90°\Rightarrow 2\alpha+60°=90°\Rightarrow\alpha=15°$.

Barem.

Figura	2 p
$\Delta ABE \equiv \Delta DAC$ (C.C.) $\Rightarrow BE = AC, m(\sphericalangle ABE) = m(DAC) = \alpha$	1 p
$[AN]$ şi $[DM]$ mediane corespunzătoare ipotenuzei în triunghiuri dreptunghice şi obţin: $DM = \frac{AC}{2} = MA = MC$, $AN = \frac{EB}{2} = NE = NB$	1 p
$MD = MA = NA = NB \Rightarrow \Rightarrow \Delta NAB$ isoscel cu baza $[AB] \Rightarrow m(\sphericalangle NAB) = m(\sphericalangle NBA) = \alpha$	1 p
$MD = MN \Rightarrow MN = MA = NA \Rightarrow \Delta MAN$ echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle MAN) = 60°$	1 p
$m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle MAN) + m(\sphericalangle NAB) = 90° \Rightarrow 2\alpha + 60° = 90° \Rightarrow \alpha = 15°$	1 p

4. În triunghiul ABC, cu $AB \neq BC$, $(BD$ este bisectoarea unghiului B ($D \in AC$) şi paralela la BD prin punctul E, mijlocul laturii $[AC]$, intersectează pe AB în M şi pe BC în N. Demonstraţi că $[AM] \equiv [CN]$.

(***)

Soluţie. Aplicăm teorema bisectoarei în ΔABC: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, de unde $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$. (1)

Din $BD \parallel ME$, conform teoremei lui Thales în ΔAME avem: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AM}$, de unde $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AM}$. (2)

Din $NE \parallel BD$, conform teoremei lui Thales în ΔBCD avem: $\frac{CN}{BC} = \frac{CE}{CD}$, de unde $\frac{CD}{BC} = \frac{CE}{CN}$. (3)

Din relaţiile (1), (2), (3) obţinem $\frac{AE}{AM} = \frac{CE}{CN}$ şi cum $[AE] \equiv [CE]$ rezultă $[AM] \equiv [CN]$.

Barem.

Figura	1 p
Teorema bisectoarei în ΔABC: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$	2 p
Teorema lui Thales în ΔAME: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AM}$	1 p
Teorema lui Thales în ΔBCD: $\frac{CN}{BC} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{CE}{CN}$	1 p
Finalizare	2 p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.