

**SUBIECTE PENTRU FAZA LOCALA A OLIMPIADEI DE MATEMATICA
TELEORMAN 12.02.2011**

Clasa a VII - a

1. Numerele reale a, b, c verifică relațiile :

$$\frac{2}{a+b} = \frac{3}{a+c} = \frac{13}{b+c}$$

- a) Demonstrați că dacă $a \cdot b \cdot c > 0$, atunci $a+b+c < 0$
b) Dacă în plus avem : $ab+ac+bc=-1000$, calculați $(|a+b+c|-90)^{2011}$

2. Se consideră numărul real $a = 2013 - \frac{1+2+3+\dots+2011}{\sqrt{1+3+5+\dots+2011}}$.

- a) Să se arate că $a \in \mathbb{N}$;
b) Calculați $S = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^{2011}$ și arătați că S este divizibil cu 5.

3. Fie ABCD trapez dreptunghic cu $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = 90^\circ$,.

$$AD = \frac{AB}{2} \text{ și } m(\widehat{BAC}) = 45^\circ, M \text{ mijlocul lui } [BC], \{O\} = DM \cap AC, DN \parallel BO, N \in AC,$$

S mijlocul lui $[DC]$.

- a) Dacă $MN \cap BO = \{P\}$ arătați că P este mijlocul lui $[MN]$.
b) Demonstrați că $SP \perp MN$
4. În triunghiul ABC cu $m(\angle 90^\circ)$, bisectoarea din B intersectează înălțimea $[AD]$, $D \in (BC)$, în E și cateta $[AC]$ în F. Fie AP, $P \in (BC)$, bisectoarea unghiului DAC.
Arătați că patrulaterul convex AEPF este romb .

Clasa a VIII- a

1. Fie paralelogramul ABCD cu $m(\widehat{A}) = 60^\circ$. Pe perpendiculara în C pe planul (ABC) se ia punctul P.

- a) Demonstrați că $(PBC) \perp (PBD) \Leftrightarrow AB = 2BC$
b) Dacă $AB=2a$, $BC=a$ și $PC=a\sqrt{3}$, aflați $d(A, (PBD))$.

2. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, punctul M este mijlocul muchiei BC și $A'M = 12$ cm.

- a) Arătați că $AB = 8$ cm.
b) Calculați valoarea tangentei unghiului format de diagonala BD' cu planul bazei (ABC) .

3. Fie expresia :

$$E(x) = \left(\frac{2x}{x^2 - 2x} - \frac{4x+12}{(x+3)(x+2)(x-2)} + \frac{x^2}{x^2 + 2x} \right) \cdot \left(x - \frac{4}{x} \right).$$

- a) Să se afle valorile lui x pentru care expresia este definită.
b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
c) Pentru $E(x) = x$, să se calculeze $E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(2009)$.

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq \pm b$.

- a) Arătați că $\frac{2a+b}{a-b} + \frac{2a-b}{a+b} = 4 + \frac{6b^2}{a^2 - b^2}$; b) Demonstrați că $\frac{2a-b}{a+b} + \frac{(a+b)(a-b)}{b^2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2a+b}{a-b} \geq 6$