



Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2015

Ediția a 14-a

Focșani, Ianuarie 2015

Clasa a 7-a

Problema 1. Se dă mulțimea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \left| \frac{5\sqrt{x} + \sqrt{p}}{\sqrt{x} + p\sqrt{p}} \in \mathbb{N} \right. \right\}.$$

Determinați toate numerele naturale prime p de două cifre pentru care $\text{Card}(A) = 4$.

Problema 2. Să se determine numerele naturale nenule x, y și z pentru care

$$x^2 + 2y^2 = 2015 + 10^z.$$

Problema 3. Fie ABC un triunghi echilateral. Se consideră punctele $D \in AC$ cu $C \in (AD)$ și $E \in BC$ cu $C \in (BE)$ astfel încât $[BD] \equiv [DE]$.

(a) Demonstrați că $[AD] \equiv [CE]$.

(b) Știind că CD este perpendiculară pe DE și că aria triunghiului ABC este $a > 0$, determinați aria patrulaterului $ABDE$.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC și punctele $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ și $M \in (EF)$ astfel încât $AF = CE$ și $EM = FM$. Știind că

$$\text{aria}[MBC] = \frac{1}{2} \cdot \text{aria}[ABC],$$

să se demonstreze că ABC este isoscel.

Timp de lucru 3 ore

Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte

Subiectul 1. Soluție.
$$\frac{5\sqrt{x} + \sqrt{p}}{\sqrt{x} + p\sqrt{p}} = \frac{(5\sqrt{x} + \sqrt{p})(\sqrt{x} - p\sqrt{p})}{(\sqrt{x} + p\sqrt{p})(\sqrt{x} - p\sqrt{p})} = \frac{5x - 5p\sqrt{px} + \sqrt{px} - p^2}{x - p^3} =$$

$$= \frac{5x - p^2 + (1 - 5p)\sqrt{px}}{x - p^3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{px} \in \mathbb{Q} \Rightarrow px \text{ pătrat perfect} \Rightarrow x = pk^2, k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\sqrt{x} + \sqrt{p}}{\sqrt{x} + p\sqrt{p}} = \frac{5k\sqrt{p} + \sqrt{p}}{k\sqrt{p} + p\sqrt{p}} = \frac{5k+1}{k+p}.$$

Avem $\frac{5k+1}{k+p} \neq 0$ și $\frac{5k+1}{k+p} < 5 \Leftrightarrow 5k+1 < 5k+5p \Leftrightarrow 1 < 5p$ adevărat, și cum $\frac{5k+1}{k+p} \in \mathbb{N}$, rezultă $\frac{5k+1}{k+p} \in \{1, 2, 3, 4\}$.

1. $\frac{5k+1}{k+p} = 1 \Leftrightarrow 5k+1 = k+p \Leftrightarrow 4k = p-1 \Leftrightarrow k_1 = \frac{p-1}{4}$
2. $\frac{5k+1}{k+p} = 2 \Leftrightarrow 5k+1 = 2k+2p \Leftrightarrow 3k = 2p-1 \Leftrightarrow k_2 = \frac{2p-1}{3}$
3. $\frac{5k+1}{k+p} = 3 \Leftrightarrow 5k+1 = 3k+3p \Leftrightarrow 2k = 3p-1 \Leftrightarrow k_3 = \frac{3p-1}{2}$
4. $\frac{5k+1}{k+p} = 4 \Leftrightarrow 5k+1 = 4k+4p \Leftrightarrow k_4 = 4p-1$

Card $A = 4 \Leftrightarrow k_1, k_2, k_3, k_4$ sunt patru numere naturale distincte.

$$k_1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p = 4m+1, m \in \mathbb{N} \Rightarrow k_3 = \frac{3(4m+1)-1}{2} = 6m+1 \in \mathbb{N}$$

$$k_2 = \frac{2(4m+1)-1}{3} = \frac{8m+1}{3} = \frac{8m-8+9}{3} = \frac{8(m-1)}{3} + 3 \Rightarrow m = 3n+1 \Rightarrow p = 4(3n+1)+1 = 12n+5,$$

$$n \in \mathbb{N}. \text{ Dar } p \text{ este număr natural prim de două cifre} \Rightarrow p \in \{17, 29, 41, 53, 89\}.$$

Subiectul 2. Soluție. Dacă $x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x^2 \in M_5$ sau $x^2 \in M_5 + 1$ sau $x^2 \in M_5 + 4$ și $2y^2 \in M_5$ sau $2y^2 \in M_5 + 2$ sau $2y^2 \in M_5 + 3$.

Cum $z \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2015 + 10^z \in M_5$ și singura posibilitate ca $x^2 + 2y^2 \in M_5$ este $x^2 \in M_5$ și $2y^2 \in M_5 \Rightarrow x \in M_5$ și $y \in M_5 \Rightarrow x = 5a, y = 5b, a, b \in \mathbb{N}^*$. Ecuația devine

$$25a^2 + 2 \cdot 25b^2 = 2015 + 10^z \Rightarrow 2015 + 10^z : 25 \Rightarrow z = 1.$$

Altfel, pentru $z \geq 2 \Rightarrow 10^z : 25 \Rightarrow 2015 + 10^z$ nedivizibil cu 25.

Obținem $25a^2 + 2 \cdot 25b^2 = 2025 \Rightarrow a^2 + 2b^2 = 81 \Rightarrow (a, b) \in \{(3, 6), (7, 4)\} \Rightarrow (x, y) \in \{(15, 30), (35, 20)\}.$

Subiectul 3. Soluție. a)

Fie $F \in (CE)$ astfel încât $(CF) \equiv (CD) \Rightarrow m(\angle DFE) = 120^\circ$. (1)

$\triangle DBE$ isoscel $\Rightarrow \angle DBC \equiv \angle DEF$. (2)

(1) și (2) $\Rightarrow \angle BDC \equiv \angle EDF \Rightarrow \triangle BDC \equiv \triangle EDF$ (U.L.U.) (3)

Din (3) $\Rightarrow (BC) \equiv (EF)$, de unde obținem $EC = AD$.

b) Din $CD \perp DE \Rightarrow AB \perp BD$, $ABDF$ dreptunghi, iar F este mijlocul segmentului $[CE]$.

Obținem $S_{ABDF} = 4 \cdot a$, iar cum AF este mediană în $\triangle ACE \Rightarrow S_{AFE} = S_{ACF} = a$. În final obținem $S_{ABDE} = 6 \cdot a$.

Subiectul 4. Soluție. Fie $AM \cap BC = \{D\}$ și notăm $\frac{MD}{AD} = k > 0$.

Atunci $\frac{\text{aria}[MBD]}{\text{aria}[ABD]} = k \Rightarrow \text{aria}[MBD] = k \cdot \text{aria}[ABD]$ și

$$\frac{\text{aria}[MCD]}{\text{aria}[ACD]} = k \Rightarrow \text{aria}[MCD] = k \cdot \text{aria}[ACD], \text{ deci}$$

$$\text{aria}[MBC] = \text{aria}[MBD] + \text{aria}[MCD] = k \cdot \text{aria}[ABD] + k \cdot \text{aria}[ACD] = k \cdot \text{aria}[ABC].$$

Cum din ipoteză avem $\text{aria}[MBC] = \frac{1}{2} \cdot \text{aria}[ABC]$, obținem $k = \frac{1}{2}$, deci $AM = MD$.

Din $AM = MD$ și $EM = MF$ rezultă că $AEDF$ este paralelogram, deci $AF = DE = CE$ și $AF \parallel DE$. Prin urmare, triunghiul EDC este isoscel cu $\angle EDC \equiv \angle ECD$ și cum $AF \parallel DE$ implică $\angle ABC \equiv \angle EDC$ (corespondente), obținem $\angle ABC \equiv \angle ACB$, deci triunghiul ABC este isoscel.

