OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12.02.2011
CLASA A VI- A

SUBIECTUL I

a) Un număr natural A are suma cifrelor egală cu 101. Să se arate că A nu poate fi pătrat perfect.

G.M. nr. 1/2011

b) Fie șirul de numere naturale: 11, 111, 1111, 11111, …. . Demonstrați că nici un element al șirului nu poate fi pătrat perfect.

Prof. Burlan Adrian Eugen, Școala Anton Pann

Barem

a) Orice pătrat perfect e de forma 3k sau 3k + 1 ……………………..…1p
Restul împărțirii unui număr natural la 3 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor numărului la 3 …………………………………………..1p
Restul împărțirii lui A la 3 este egal cu restul împărțirii lui 101 la 3 și deci este este egal cu 2 $\Rightarrow$ A = 3k + 2 $\neq$ p.p. ……………………………….. 2p

b) Numere din șir sunt de forma 4k + 3 (din criteriul de divizibilitate cu 4)…2p
Pătratele perfecte sunt de forma 4k sau 4k+1 deci numerele din șir nu sunt pătrate perfecte …………………………………………………...………..1p

SUBIECTUL II

Se dau numerele $A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{39\cdot 40}$ şi $B = \frac{1}{21\cdot 40} + \frac{1}{22\cdot 39} + ... + \frac{1}{30\cdot 31}$. Arătaţi că numărul $\frac{A}{B}$ este numar prim.

prof. Constantinescu Dragoş, Gr. Şc. Ind. "General Magheru"

Rezolvare : Se arată mai întâi că $A = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + ... + \frac{1}{40}$ astfel :

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{39} - \frac{1}{40} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{40} - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + ... + \frac{2}{40}\right) \Rightarrow$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{40} - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{21} + ... + \frac{1}{40}. \text{ ………………………………………2p.}$$

Deci $\Rightarrow$ A = $\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+...+\frac{1}{40}=({}^{40)}\frac{1}{21}+{}^{21)}\frac{1}{40})+({}^{39)}\frac{1}{22}+{}^{22)}\frac{1}{39})+...+({}^{31)}\frac{1}{30}+{}^{30)}\frac{1}{31})$ ……1p

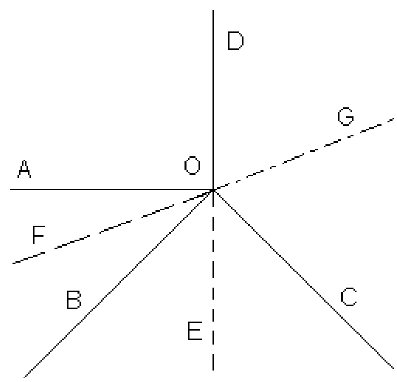
$\Rightarrow A=61\cdot(\frac{1}{21\cdot40}+\frac{1}{22\cdot39}+...+\frac{1}{30\cdot31})\Rightarrow$ …………………………………….……..2p

$A=61\cdot B\Rightarrow\frac{A}{B}=61$ număr prim……………….…………..……………..2p

SUBIECTUL III

Fie <AOB , <BOC, <COD, <DOA, unghiuri formate în jurul punctului O. Bisectoarea lui <BOC şi [OD sunt semidrepte opuse. Dacă [OD este perpendiculară pe [OA şi m(<AOB) = 45^0 , să se arate că:

a) OC este perpendiculară pe OB ;
b) Bisectoarele unghiurilor <AOB şi <DOC sunt semidrepte opuse.



Barem

a) 1p. Figura. Construim [OE – bisectoarea lui <BOC.

1p. Atunci m(<EOB) = 180^0 - [m (<AOB) + m (<AOD)] =180^0 - (90^0 + 45 ^{0}) = 45^0 ,

1p. deci m(<EOC) = 45^0 . Rezultă că m(<COB) = 90^0 şi OC $\perp$OD.

b) 1p. Avem m(< COD) = 180 – m(< EOC) = $180^0 – 45^0 = 135^0$

1p. Fie [OF bisectoarea <AOB şi [OG bisectoarea <COD.

2p. Atunci m (<FOG) = m (< GOC) + m (<COB) + m (<BOF) =

= $67^0\,30' + 90^0 + 22^0\,30' = 180^0$ deci unghiul GOF este un unghi cu laturile

în prelungire aşa că [OG şi [OF sunt semidrepte opuse.

SUBIECTUL IV

Să se arate că 23 divide $3^{23}+5^{23}+15^{23}$.

Prof.Cotoarba Cristian si Prof.Barbu Daniela

Soluţie.

Se aplică Mica teoremă a lui Fermat: $\forall a \in Z, p = prim, p \neq a \Rightarrow a^{p-1} = M_p + 1$. 2p

În cazul nostru avem $3^{23}+5^{23}+15^{23}=3\cdot 3^{22}+5\cdot 5^{22}+15\cdot 15^{22}=$ 2p
$3\cdot(M_{23}+1)+5\cdot(M_{23}+1)+15\cdot(M_{23}+1)==M_{23}+3+5+15=M_{23}$ 3p