VRANCEA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ FOCŞANI, 12.02.2011

CLASA a VII-a

1) Fie x, y şi z numere întregi nenule. Ştiind că x si y sunt direct proportionale cu numerele 5 şi 6 , iar numerele y şi z sunt invers proportionale cu numerele 3 şi 4, stabiliţi valoarea de adevăr a propozitiilor : $P_1 : x^2 + y^2$ este un pătrat perfect ; $P_2 : y^2 + z^2$ este un patrat perfect.

2) Determinaţi numerele naturale *a, b, c* ştiind că mediile geometrice a două câte două dintre ele sunt 6, 8 şi 12.

3) În rombul *ABCD* dreapta *AC* intersectează perpendiculara în *B* pe *BC* în punctul $M \in [AC]$. Să se arate că *M* este ortocentrul triunghiului *ABD*.

4) Fie *ABCD* un paralelogram si $M \in AB$, $P \in CD$ astfel incat (*AM*)=(*CP*). Din punctele *M* si *P* se construiesc respective perpendicularele *QM* pe *AB* si *NP* pe *CD*, $Q \in AD$, $N \in BC$.

a) Aratati ca patrulaterul *MNPQ* este paralelogram;

b) Care trebuie sa fie pozitia punctelor *M* si *P* astfel incat *MNPQ* sa fie dreptunghi?

Propunător : prof. Neagu Aurelia – C.N. "Al.I.Cuza "-Focşani

Clasa a VIII-a

1) Arătaţi că oricare ar fi x, y, z numere reale, au loc inegalităţile:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$

b) $x^4 + y^4 + 1 \geq xy(x + y + 1)$

2) a) Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{2^n - 1} \in \mathbb{N}$.

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{a - b\sqrt{2011}}{b - c\sqrt{2011}} \in \mathbb{Q}$ atunci $a \cdot c$ este pătrat perfect.

3) Fie ABCD un tetraedru în care [BC] $\equiv$[CD]. Bisectoarele unghiurilor ACB, ACD şi BCD intersectează [AB], [AD], [BD] respectiv în M, Nşi P .

Demonstraţi că $CP \perp MN$.

4) În piramida triunghiulară regulată SABC cu muchia bazei AB = a notăm cu M mijlocul muchiei (SC). Dacă m($\sphericalangle$MBC) = 30°, aflaţi distanţa de la punctul A la planul (SBC).

Propunător, prof. Mariana Guzu, C.N. „UNIREA"