Olimpiada de matematică – faza locală

VASLUI

(12.02.2011)

Solutii

Clasa a V-a

1. Un vas conţine bomboane colorate astfel 48 verzi, 30 roşii, 12 galbene, 10 albastre. Acestea sunt toate învelite în folie, astfel încât să nu ştim ce culoare are o bomboană oarecare. Care este cel mai mic număr de bomboane ce trebuie luat din vas pentru a fi siguri că avem cel puţin 15 bomboane de aceeaşi culoare?

Rezolvare: Direct fără justificare 51
Găsim cel mai mare număr de bomboane pe care le putem lua astfel încât să nu avem încă 15 bomboane de aceeaşi culoare. Astfel putem lua: toate cele 12 galbene, toate cele 10 albastre, 14 verzi şi 14 roşii, în total 50 bomboane.
Următoarea bomboană pe care o luăm poate fi verde sau roşie şi vom obţine 15 bomboane de aceeaşi culoare fie verzi fie roşii. Răspunsul este 50 + 1, adică 51 bomboane.

2. Toate numerele naturale care încep cu cifra 2 sunt scrise în ordine crescătoare. Astfel se obtine următorul sir de cifre: 2 20 21 22 23 24 25 26 ... . Aflati ce cifră stă pe locul 2010?

Rezolvare:
Vom scrie numerele care formează sirul dat într-un tabel ce ne permite să numărăm mai usor cifrele:

2	$1\times 1=1$ cifră
$20\ 21\ 22\ 23\ 24 \ldots 29$	$10\times 2=20$ cifre
$200\ 201\ 202\ 203 \ldots 299$	$100\times 3=300$ cifre
$2000\ 2001\ 2002 \ldots 2999$	$1000\times 4=4000$ cifre

Deci cifra de pe locul 2010 este una din cifrele numerelor de patru cifre.

$$2010-(1+20+300)=1689$$

$$1689:4=422 \text{ rest } 1$$

Obtinem astfel că cifra căutată este prima cifră a unui număr de forma $\overline{2abc}$.

3. Să se determine mulţimile A şi B astfel încât:

1) $A\cup B=\{1;2;3;4;5;6;7\}$;
2) $A\cap B=\{3;4\}$;
3) $A\cap\{5;6;7\}=\varnothing$;
4) $\{1;2\}\cap B\neq\varnothing$.

(G.M.2-2010)

Rezolvare:
Din 2) $\Rightarrow \{3;4\}\subset A, \{3;4\}\subset B$

Din 3) şi 1) $\Rightarrow \{5;6;7\} \subset B$ şi $5;6;7 \notin A$.

Din 4) şi 1) $1 \in B$ şi $2 \in A$, sau $2 \in B$ şi $1 \in A$, sau $1;2 \in B$ şi $1;2 \notin A$

Deci $A = \{2;3;4\}$; $B = \{1;3;4;5;6;7\}$

$A = \{1;3;4\}$; $B = \{2;3;4;5;6;7\}$

$A = \{3;4\}$; $B = \{1;\ 2;\ 3;4;5;6;7\}$

4. Fie numerele naturale n, care împărţite la 2007, dau câtul mai mare decât restul cu 1.

a) Să se arate că suma numerelor date este divizibilă cu 2007;

b) Să se determine ultima cifră a sumei acestor numere.

Rezolvare:

Conform teoremei împărţirii cu rest avem:

$n = 2007 \cdot c + r$, unde $c, r \in N$ şi $r \in (0;1;2,......,2006)$, $c = r + 1$.

Deci numerele vor fi de forma:

$$\begin{cases} n_1 = 2007 \cdot 1 + 0 \\ n_2 = 2007 \cdot 2 + 1 \\ n_3 = 2007 \cdot 3 + 2 \\ .... \\ n_{2007} = 2007 \cdot 2007 + 2006 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S = 2007 \cdot (1 + 2 + ... + 2007) + 1 + 2 + ... + 2006$$

$$S = 2007 \cdot \frac{2007 \cdot 2008}{2} + \frac{2006 \cdot 2007}{2}$$

$$S = 2007 \cdot 2007 \cdot 1004 + 1003 \cdot 2007 \Leftrightarrow S = 2007 \cdot (2007 \cdot 1004 + 1003) \Rightarrow S \,\vdots\, 2007$$

$$U.c.(S) = U.c.\left(\overline{....6} + \overline{.....1}\right) = 7$$