Olimpiada de matematică – faza locală

VASLUI

(12.02.2011)

Solutii

Clasa a VI-a

1. Un număr natural n împărţit la 7 dă restul 3 şi împărţit la 8 dă restul 5.

a) Aflaţi cel mai mic număr n care îndeplineşte condiţiile date.

b) Ce rest se obţine prin împărţirea lui n la 56?

Soluţie:

a) n = 7a + 3 şi n = 8b + 5, a şi b$\in \mathbb{N}$; 7a + 3 = 8b + 5 $\Leftrightarrow$ 7a – 8b = 2;
a = 6 $\Rightarrow$ n = 45.

b) n = 7a + 3 $\Rightarrow$ 8n = 56a + 24 , n = 8a + 5 $\Rightarrow$ 7n = 56b + 35
8n – 7n = 56a – 56b + 24 – 35 = 56a – 56b – 56 + 56 + 24 – 35
n = 56(a – b – 1) + 45 $\Rightarrow$ restul este 45.

2. Pe o dreaptă se iau punctele O, A_1, A_2, …., A_{10} şi simetricele lor faţă de punctul O: B_1, B_2, …., B_{10}, astfel încât OA_1 = 1 cm, A_1A_2 = 2 cm, $A_2A_3 = 2^2$ cm, …., $A_9A_{10} = 2^9$ cm.

a) Comparaţi lungimea segmentului [B_5A_{10}] cu lungimea segmentului [B_8A_5].

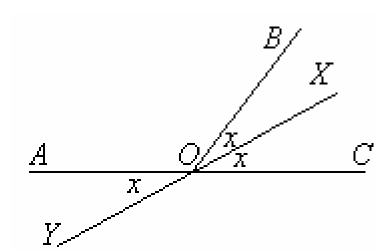
b) Dacă M este mijlocul segmentului [OA_8], aflaţi k pentru care $M \in [A_kA_{k+1}]$

***

Soluţie: $B_5A_{10} = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 + 1 + 2 + \ldots + 2^9$
$B_8A_5 = 2^7 + \ldots + 2^2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2^3 + 2^4$.
Se observă că $B_5A_{10} > B_8A_5$ cu $2^8 + 2^9$; $OA_8 = 1 + 2 + \ldots + 2^7 = 2^8 - 1 = 255$.
$OM = \dfrac{255}{2} = 127\dfrac{1}{2}$ cm. Se observă că $OA_7 = 1 + 2 + \ldots + 2^6 = 2^7 - 1 = 127 < 127\dfrac{1}{2}$, de unde rezultă că $M \in [A_7A_8]$.

3. Fie $\angle AOB$ şi $\angle BOC$ adiacente suplementare, [OX bisectoarea $\angle BOC$ şi semidreapta [OY opusă semidreptei [OX. Ştiind că $m(\angle BOX)$ este mai mică decât măsura complementului acestuia de trei ori, să se determine $m(\angle YOB)$ şi $m(\angle YOC)$.

Soluţie: Dacă $m(\angle BOX) = x = m(\angle XOC) = m(\angle AOY)$.
Complementul $\angle BOX$ are măsura 3x, de unde
$x + 3x = 90^0$ şi $m(\angle BOX) = 22^0 30'$.
Astfel $m(\angle AOB) = 135^0$,
$m(\angle YOB) = 157^0 30'$, $m(\angle YOC) = 157^0 30'$.



4. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ ştiind că $11a-8b-4c=0$.

GM 11-2010

Soluţie: Din relaţia dată rezultă că $11a \vdots 4$, de unde $a\in\{4;8\}$.

Dacă $a=4 \Rightarrow 11=2b+c$, $\overline{bc}\in\{19;\ 27;\ 35;\ 43;\ 51\}$,

deci $\overline{abc}\in\{419;\ 427;\ 435;\ 443;\ 451\}$

Dacă $a=8 \Rightarrow 22=2b+c$, $\overline{bc}\in\{78;\ 86;\ 94\}$, deci $\overline{abc}\in\{878;\ 886;\ 894\}$