

**Olimpiada de matematică – faza locală**  
**VASLUI**  
**(12.02.2011)**

**Solutii**

**Clasa a VII-a**

1. Rezolvați în  $\mathbb{Q}$  ecuația:  $\frac{x-10}{2010} + \frac{x-17}{2003} = \frac{x-2010}{10} + \frac{x-2003}{17}$ .

**S.GM.3-2010**

Soluție:

$$\begin{aligned} \frac{x-10}{2010} - 1 + \frac{x-17}{2003} - 1 &= \frac{x-2010}{10} - 1 + \frac{x-2003}{17} - 1 \\ \frac{x-2020}{2010} + \frac{x-2020}{2003} &= \frac{x-2020}{10} + \frac{x-2020}{17} \\ (x-2020) \left( \frac{1}{2010} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{10} - \frac{1}{17} \right) &= 0 \\ \left( \frac{1}{2010} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{10} - \frac{1}{17} \right) \neq 0 &\Rightarrow x = 2020 \end{aligned}$$

2. Fie fracțiile de forma  $\frac{x}{y}$  unde  $x, y \in \mathbb{N}^*$  și  $x < y \leq 2009$ . Să se arate că suma tuturor

fracțiilor de forma  $\frac{x}{y}$  este un număr natural.

**SOLUȚIE:**

Notăm cu  $S$  suma tuturor fracțiilor cerute.

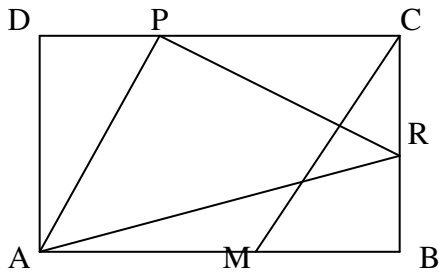
$$\begin{aligned} S &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009} \right) + \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{2009} \right) + \\ &+ \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \dots + \frac{3}{2009} \right) + \dots + \left( \frac{2008}{2009} \right); \\ S &= \frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \dots + \frac{1+2+3+\dots+2008}{2009}; \quad S = \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{2008 \cdot 2009}{2 \cdot 2009}; \\ S &= \frac{1}{2} (1+2+3+\dots+2008); \quad S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2008 \cdot 2009}{2} \Rightarrow S = 1008518 \end{aligned}$$

3. Fie  $ABCD$  un dreptunghi cu  $AB > BC$  și punctele  $M \in (AB)$ ,  $P \in (CD)$ ,  $R \in (BC)$  astfel încât  $(AM) \equiv (CP) \equiv (BC)$  și  $(CR) \equiv (BM)$ .

a) Demonstrați că  $CM \perp RP$ ;

b) Aflați măsura unghiului ascuțit format de dreptele  $AR$  și  $CM$ .

Soluție



- a)  $\triangle BCM \equiv \triangle CPR$  ((LUL))  $\Rightarrow \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle CPR$ ;  
 $m(\sphericalangle CPR) + m(\sphericalangle CRP) = 90^\circ \Rightarrow$   
 $m(\sphericalangle BCM) + m(\sphericalangle CRP) = 90^\circ \Rightarrow CM \perp RP$ ;  
 b)  $AM \parallel CP$  și  $(AM) \equiv (CP) \Rightarrow AMCP$  paralelogram;  
 $AP \parallel CM$  și  $RP \perp CM \Rightarrow RP \perp AP$ ;  
 $\triangle BCM \equiv \triangle CPR \Rightarrow (RP) \equiv (CM)$ ,  $(CM) \equiv (AP) \Rightarrow$   
 $\triangle APR$  dreptunghic isoscel  $\Rightarrow m(\sphericalangle PAR) = 45^\circ$ ;  
 $AP \parallel CM$ ,  $AR$  secantă  $\Rightarrow$  unghiul cerut are  $45^\circ$ .

4. Fie patrulaterul convex  $ABCD$  cu  $P \in (DC)$  astfel încât  $AP \parallel BC$  și  $BP \parallel AD$ .

- a) Dacă  $AP \cap BD = \{M\}$  și  $BP \cap AC = \{N\}$ , arătați că  $MN \parallel DC$ .  
 b) Dacă  $T \in (AB)$  astfel încât  $NT \parallel AP$ , atunci  $(MT) \equiv (PN)$ .

SOLUȚIE:

Fie  $O$  centrul patrulaterului  $ABCD$ .

$$\text{Pentru că } \left. \begin{array}{l} BP \parallel AD \xrightarrow{T.Thales} \frac{BO}{OD} = \frac{ON}{OA} \\ AP \parallel BC \xrightarrow{T.Thales} \frac{OM}{OB} = \frac{AO}{OC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OM}{OD} = \frac{ON}{OC}, \text{ de}$$

unde conform reciprocei teoremei lui Thales avem  $MN \parallel DC$ .

$$\text{Pentru că } NT \parallel AP \xrightarrow{T.Thales} \frac{AT}{TB} = \frac{AN}{NC}.$$

$$\text{Pentru că } NM \parallel CD \xrightarrow{T.Thales} \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MP}$$

de unde  $\frac{AT}{TB} = \frac{AM}{MP}$  și deci conform reciprocei teoremei lui

Thales avem  $MT \parallel BP$ . Astfel  $TNPM$  este paralelogram și  $(MT) \equiv (PN)$ .

