

Olimpiada de matematică, etapa locală, 17.02.2008  
clasa a V-a  
Varianta 2

1. Suma dintre dublul primului număr și triplul de-al doilea este 2488. Împărțind primul număr la sfertul celui de-al doilea obținem câtul 3 și restul 2. Aflați cele două numere.
2. a) Câte numere naturale cuprinse între 1909 și 2105 sunt divizibile cu 10?  
b) Determinați suma numerelor naturale cuprinse între 1909 și 2105 care împartite la 28 dau restul 5 și împartite la 35 dau restul 12.
3. Fie  $A = 2008^{2009} + 2009^{2009} + 2006^{2008}$  și  
 $B = 2010 \cdot 2009 - 2009 \cdot 2008 - 2 \cdot 2008 + 2 \cdot 2007 - 2 \cdot 2006$   
Stabiliți dacă numerele A și B sunt pătrate perfecte.
4. Se da numărul  $A = 5^n + 6^{n^2} + 7^{n^2+n}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - a) Arătați că  $n^2 + n$  este număr par;
  - b) Aflați ultima cifră a numărului A.

**Nota:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Subiecte selectate de prof. Costache Aurelian

1. reprezintă numerele .....2p  
reprezintă suma.....2p  
află sfertul celui de-al doilea.....1p  
finalizează.....2p
- 2.a) scrie primul și ultimul nr.....1p  
Calculează câte sunt.....1p  
b) află forma generală a numerelor.....2p  
află câte numere sunt.....1p  
finalizează.....2p
3. calculează  $U(2008^{2009})$ ,  $U(2009^{2009})$ ,  $U(2006^{2008})$ ....3p  
Finalizează A.....1p  
Calculează B.....2p  
Finalizează B.....1p
- 4.a)  $n^2+n=n(n+1)$  și discută.....2p  
b) calculează fiecare câte .....1p=3p  
finalizează.....2p

OLIMPIADA de MATEMATICĂ  
Faza locală 17 februarie 2008  
Clasa a VI-a

Varianta nr. 2

1. Raportul dintre prețul unui caiet și prețul unei cărți este  $\frac{2}{15}$ . Știind că suma dintre dublul prețului caietului și triplul prețului cărții este 39,2 RON, să se afle: a) prețul caietului și prețul cărții; (4 puncte)

b) cu cât la sută din prețul caietului este mai mare prețul cărții. (3 puncte)

\*\*\*

2. Determinați cifrele a și b știind că media aritmetică a numerelor  $\overline{aabb}$ ,  $\overline{aba}$ ,  $\overline{ba}$  și b este 625.

G.M. 11/2007

(7 puncte)

3. Punctul C este mijlocul segmentului (AB) și punctul B este mijlocul segmentului (CD). Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

$p_1 : "CD = \frac{AD + BC}{2}";$  (4 puncte)

$p_2 : "\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} \geq \frac{2}{AC}";$  (3 puncte)

4. Fie punctul  $O \in XY$ . De aceeași parte a dreptei XY se duc semidreptele (OA și (OB astfel încât  $m(\angle AOB) = 90^\circ$ , (OA  $\subset$  int  $\angle XOB$ . Dacă (OC și (OD sunt bisectoarele unghiurilor  $\angle XOB$ , respectiv  $\angle AOY$ , arătați că măsura unghiului  $\angle COD$  este constantă.

\*\*\*

(7 puncte)

Probleme selectate de prof. MARIANA RĂDULESCU

Nota:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Inspectoratul Școlar Județean Argeș

OLIMPIADA de MATEMATICĂ  
Faza locală 17 februarie 2008  
Clasa a VI-a

Varianta nr. 2

Barem de corectare și notare

1. a)  $\frac{x}{y} = \frac{2}{15}$ , unde x este prețul caietului și y prețul cărții ..... 1p  
 $2x + 3y = 39,2$  ..... 1p  
 $x = 1,6$  RON ..... 1p  
 $y = 12$  RON ..... 1p  
 b)  $x + p\% \cdot x = y$  ..... 1p  
 finalizare  $p\% = 650\%$  ..... 2p
2.  $\frac{\overline{aabb} + \overline{aba} + \overline{ba} + b}{4} = 625$  ..... 1p  
 $\frac{1100a + 11b + 101a + 10b + 10b + a + b}{4} = 625$  ..... 2p  
 $1202a + 32b = 2500$  ..... 1p  
 $\Rightarrow a \in \{1, 2\}$  ..... 1p  
 Finalizare  $a = 2$  și  $b = 3$  ..... 2p
3.  $AC = CB = BD = x$  ..... 1p  
 $P_1: CD = \frac{AD + BC}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{3x + x}{2} \Leftrightarrow 2x = 2x$  (A) ..... 3p  
 $P_2: \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} \geq \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{11}{6x} \geq \frac{12}{6x}$  (F) ..... 3p
4. Notăm  $m(\angle XOA) = 2x$  și  $m(\angle YOB) = 2y$  ..... 1p  
 $m(\angle XOC) = m(\angle COB) = x + 45^0$  ..... 1p  
 $m(\angle AOD) = m(\angle DOY) = y + 45^0$  ..... 1p  
 $m(\angle AOC) = 45^0 - x$  ;  $m(\angle BOD) = 45^0 - y$  ..... 1p  
 $m(\angle COD) = x + y$  ..... 1p  
 $2x + 90^0 + 2y = 180^0$  ..... 1p  
 Finalizare:  $m(\angle COD) = 45^0$  (constant) ..... 1p

Clasa a VII-a  
Varianta a II-a

1. a) Demonstrați că  $\sqrt{1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+\dots+1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\cdot 2008} \notin \mathbf{Q}$ .

b) Dacă  $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ , demonstrați că  $\frac{1}{2} < S < 1$ .

2. Fie  $a, b, c$  numere reale pozitive astfel încât:  $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$ . Arătați că:

a)  $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbf{Q}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbf{R-Q}$ .

3. Fie ABCD un paralelogram. Notăm cu M punctul în care se intersectează bisectoarele unghiurilor A și D și cu N punctul în care se intersectează bisectoarele unghiurilor B și C.

a) Calculați măsura unghiului AMD;

b) Demonstrați că  $MN \parallel AB$ .

4. Se dă  $\triangle ABC$  cu  $AB=4\text{cm}$ ,  $BC=6\text{cm}$ ,  $AC=5\text{cm}$ . Prelungim latura  $[AB]$  cu segmentul  $[BD]$ ,  $BD=6\text{cm}$  și latura  $[AC]$  cu segmentul  $[CE]$ ,  $CE=3\text{cm}$ .

a) Calculați lungimea segmentului  $[DE]$ ;

b) Dacă  $\{M\} = BC \cap DE$ , calculați  $P_{\triangle MCE}$ .

Subiecte selectate de prof. Dumitru Borocan

Notă :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru :3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Clasa a VII-a  
Varianta a II-a

1 Soluție:

a) Ultima cifră a produselor:  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, \dots, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008$   
este 0 -----(1p)

Ultima cifră a numărului  $n = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008$   
este 3 -----(1p)

Deoarece  $U(n)=3 \Rightarrow n$  nu este pătrat perfect  $\Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbf{Q}$  -----(1p)

$$\begin{aligned} \text{b) } S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} - 2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) = \dots \text{-----(1p)} \\ &= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \text{-----(1p)} \end{aligned}$$

$$S < 50 \cdot \frac{1}{50} = 1 \text{-----(1p)}$$

$$S > 50 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{2} \text{-----(1p)}$$

2Soluție:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = k \Rightarrow a = k(b+c), b = k(a+c), c = k(a+b) \text{-----(1p)}$$

$$\Rightarrow a+b+c = k(2a+2b+2c) \Rightarrow k = \frac{1}{2} \text{-----(1p)}$$

$$\text{sau } \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2} \text{-----(2p)}$$

$$2a = b+c, 2b = a+c, 2c = a+b \text{-----(1p)}$$

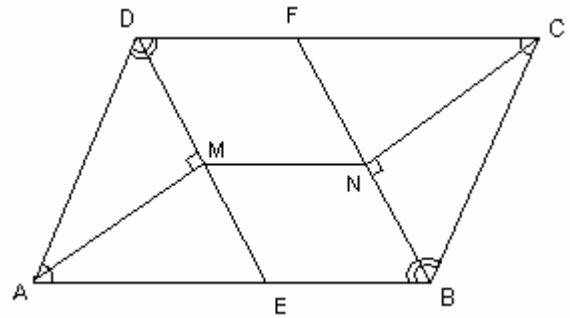
$$2b = a + \frac{a+b}{2} \Rightarrow b = a \text{-----(1p)}$$

$$2c = a + \frac{a+c}{2} \Rightarrow c = a \text{-----(1p)}$$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1 \in \mathbf{Q} \text{-----(1p)}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \in \mathbf{R-Q} \text{-----(1p)}$$

3.Soluție:



a)  $m(\angle AMD) = 180^\circ - \left( \frac{m(\angle A) + m(\angle D)}{2} \right) = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$  -----(2p)

b) Notăm  $\{E\} = DM \cap AB$  și  $\{F\} = BN \cap DC$ .

$\triangle AMD \cong \triangle AME$  (ULU)  $\Rightarrow M$  este mijlocul segmentului  $[DE]$  și  $ME = \frac{DE}{2}$ .

Analog  $BN = \frac{BF}{2}$  -----(1p)

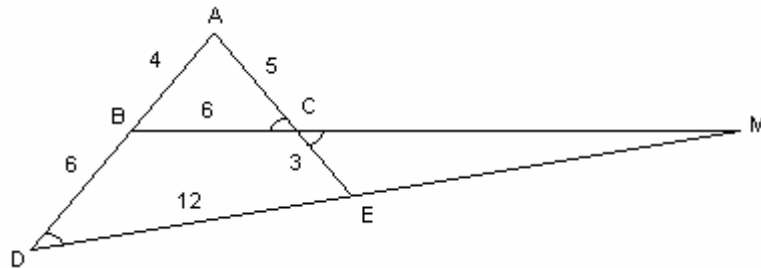
$[AE] \cong [AD] \cong [BC] \cong [CF] \Rightarrow [BE] \cong [DF]$  -----(1p)

$BE \parallel DF$  și  $[BE] \cong [DF] \Rightarrow BEDF$  paralelogram -----(1p)

$ME \parallel BN$  și  $[ME] \cong [BN] \Rightarrow MEBN$  paralelogram -----(1p)

$\Rightarrow MN \parallel BC$  -----(1p)

4.Soluție:



$\frac{AB}{AE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$  (1) -----(1p)

Din (1) și  $\angle BAC \cong \angle EAD \Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle EAD$  (2) -----(1p)

$DE = 12\text{cm}$  -----(1p)

Din (2)  $\Rightarrow \angle ACB \cong \angle D$  -----(1p)

Din  $\angle MCE \cong \angle MDB$  și  $\angle EMC \cong \angle BMD \Rightarrow \triangle MEC \sim \triangle MBD$  -----(1p)

$\frac{MC}{MD} = \frac{CE}{DB} = \frac{ME}{MB}$  -----(1p)

$\frac{MC}{ME + 12} = \frac{1}{2} = \frac{ME}{MC + 6} \Rightarrow 2MC = ME + 12$  și  $2ME = MC + 6 \Rightarrow ME = 8\text{cm}, MC = 10\text{cm}$  -----(1p)

Olimpiada de matematică, etapa locală, 17.02.2008  
clasa a VIII-a  
Varianta 2

1. a) Fie  $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$  astfel încât  $a + b + c = 0$ . Demonstrați că

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}.$$

b) Calculați  $S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2007^2} + \frac{1}{2008^2}}$ .

2. Un pătrat cu latura de  $n$  cm,  $n \in \mathbb{N}^*$ , se împarte în  $n^2$  pătrate cu latura de 1 cm și în fiecare dintre aceste pătrate se înscrie câte un cerc tangent laturilor pătratului în care se înscrie. Fie  $a$  numărul punctelor de tangență ale cercurilor între ele.

a) Determinați  $a$  pentru  $n = 6$ .

b) Care este probabilitatea ca, pentru  $2 \leq n \leq 2008$ ,  $n$  arbitrar ales, numărul  $2a$  să fie pătrat perfect?

3. Fie  $VABCD$  o piramidă patrulateră regulată în care  $VA \perp VC$ ,  $d = (VAB) \cap (VDC)$  și  $g = (VBC) \cap (VAD)$ .

c) Arătați că  $(d, g) \parallel (ABC)$ .

d) Aflați  $m(\angle VAB)$ .

e) Fie  $M \in [VB]$  astfel încât oricare ar fi punctul  $P \in [VB]$ ,  $AM + MC \leq AP + PC$ . Calculați lungimea segmentului  $BM$  știind că  $AB = 2a$  cm.

4. Pe planul triunghiului isoscel  $ABC$  ( $[AB] \equiv [AC]$ ) se duce perpendiculara în  $G$  (centrul de greutate) și se ia pe acesta un punct  $D$ . Fie punctul  $N \in [AB]$  astfel încât

$$\frac{AN}{NB} = \frac{7}{2};$$
 prin  $N$  se duce un plan  $\alpha \parallel (DBC)$  care intersectează  $DG$  în  $Q$ .

f) Stabiliți valoarea raportului  $\frac{GQ}{GD}$ .

g) Determinați  $m(\angle(\alpha, (ABC)))$  știind că  $DG = \frac{AM}{3}$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $[BC]$ .

Subiecte propuse de prof. Codeci Daniel.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru : 3 ore.

1. a) Din  $a + b + c = 0 \Rightarrow \frac{2(a+b+c)}{abc} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{bc} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{ab} = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{ab} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \Rightarrow \dots\dots\dots 2p$

$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| \in \mathbf{Q} \dots\dots\dots 1p$

b) În relația de la punctul a) se consideră  $a = 1, b = k - 1, c = -k$ , cu  $a + b + c = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2}} = \left| \frac{1}{1} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right| = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \dots\dots\dots 1p$

În această relație se consideră  $k = 2, 3, \dots, 2008$  și se obține :

$S = 1 + \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{4-1} - \frac{1}{4} + \dots + 1 + \frac{1}{2008-1} - \frac{1}{2008} = \dots\dots\dots 1p$

$= 2007 + 1 - \frac{1}{2008} = \frac{4032063}{2008} \dots\dots\dots 1p$

2. a) Se constată că punctele de tangență căutate coincid cu mijloacele laturilor pătratelor de

lungime 1, cu excepția celor situate pe laturile pătratului mare.

Pentru cazul  $n = 6$ , în rețeaua celor 36 pătrate mici obținute, punctele căutate se pot număra astfel : pe fiecare dintre cele 5 paralele orizontale la latura pătratului inițial se găsesc

câte 6 puncte, deci  $5 \cdot 6 = 30$  puncte. Analog, pe cele 5 paralele verticale se află tot 30 puncte. În total sunt  $a = 30 \cdot 2 = 60$  puncte.

.....se punctează 2p răspunsul corect (60 puncte) și 2p justificarea (oricare ar fi).

b) Pentru cazul general, printr-un raționament asemănător celui de la punctul a), se obține că sunt :  $a = (n - 1) \cdot n \cdot 2 = 2n(n-1)$  puncte  $\Rightarrow \dots\dots\dots 1p$   
 $2a = 4n(n-1)$

cum:  $(n-1)^2 < n(n-1) < n^2 \Rightarrow n(n-1)$  nu poate fi pătrat perfect  $\Rightarrow \dots\dots\dots 1p$

$2a = 2^2 \cdot n(n-1)$  nu poate fi pătrat perfect oricare ar fi  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \Rightarrow p=0 \dots\dots\dots 1p$

3.a) Din  $d = (VAB) \cap (VDC)$ ,  $AB \subset (VAB)$ ,  $DC \subset (VDC)$ ,  $AB \parallel DC \Rightarrow d \parallel AB \dots\dots 1p$

Analog se obține că  $g \parallel AD$ . Cum  $AB \subset (ABC)$ ,  $AD \subset (ABC) \Rightarrow (d, g) \parallel (ABC) \dots\dots 1p$

b) Se obține că  $\Delta VAC$  și  $\Delta ABC$  sunt dreptunghice isoscele, cu ipotenuza AC comună, deci sunt congruente, de unde rezultă că :  $[VA] \equiv [AB] \equiv [VB] \Rightarrow \Delta VAB$  echilateral  $\Rightarrow$

$m(\angle VAB) = 60^\circ \dots\dots\dots 2p$

c) Se desfășoară fețele laterale VAB și VBC ale piramidei în același plan. Punctul M căutat este la intersecția segmentelor AC și VB, pentru că în  $\triangle ACP$ ,  $AM + MC = AC \leq AP + PC$

oricare ar fi poziția punctului  $P \in [VB]$ . .....

2p

Cum  $\triangle VAB$  și  $\triangle VBC$  sunt echilaterale  $\Rightarrow ABCV$ - romb  $\Rightarrow BM = \frac{VB}{2} = a$  cm. ..

.1p

4. a) Fie mediana AM a  $\triangle ABC$ ,  $\alpha \cap AM = \{R\}$ ,  $\alpha \cap AC = \{P\}$ . Din  $\frac{AN}{NB} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{7}{9}$ , din  $\alpha \parallel (DBC) \Rightarrow NP \parallel BC$  și  $QR \parallel DM \Rightarrow \dots\dots\dots$  1p

$$\frac{NP}{BC} = \frac{7}{9} = \frac{AR}{AM} \Leftrightarrow \frac{2GM + GR}{3GM} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{2GM + GR}{2GM} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{GR}{GM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \dots\dots\dots$$
 1p

$$\frac{GQ}{GD} = \frac{GR}{GM} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots$$
 1p

b)

$$m(\angle(\alpha, (ABC))) = m(\angle((DBC), (ABC))) = m(\angle DMA) \dots\dots\dots$$
 2p

Din

$$DG = \frac{AM}{3} \Rightarrow [DG] \equiv [GM] \Rightarrow \triangle DGM \text{ dreptunghic isoscel} \Rightarrow m(\angle DMG) = 45^\circ \dots$$

2p