Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2009

EDIŢIA a VI-a SLATINA – 27 noiembrie 2009

Clasa a VIII-a

1. Fie $SABC$ un tetraedru echifacial (feţele sunt triunghiuri congruente). În triunghiurile SAB, SBC, respectiv SCA, construim bisectoarele AD, BE, CF, cu $D \in (SB)$, $E \in (SC)$, $F \in (SA)$, şi $DM \parallel AB$, $EN \parallel BC$, $FP \parallel CA$, unde $M \in (SA)$, $N \in (SB)$ şi $P \in (SC)$. Să se arate că

$$2\,(MD + NE + PF) \leq AB + BC + CA.$$

Costel Anghel

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b \mid a^2$, $c \mid b^2$ şi $a \mid c^2$. Să se arate că $abc \mid (a+b+c)^7$.

Emil Ciolan

3. Să se determine numerele reale care verifică simultan egalităţile

$$\frac{7y^2+z^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2+4}{x}, \qquad \frac{7z^2+x^2}{y^2+z^2} = \frac{z^2+4}{y}, \qquad \frac{7x^2+y^2}{z^2+x^2} = \frac{x^2+4}{z}.$$

Marius Perianu

4. Numerele reale a, b verifică şirul de inegalităţi:

$$a < 2b < 3a < 4b < 5a < 6b < ... < (2n-1)\,a < 2nb < (2n+1)\,a < (2n+2)\,b < ...$$

Să se demonstreze că $a = b$.

Marius Perianu