

I.S.J. Dâmbovița

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ-CLASA a V-a**

**SUBIECTUL I**

a) Demonstrați că:  $86 \mid 9^{n+2} + 5 \cdot 9^n, n \in \mathbb{N}^*$   
 $258 \mid 9^{n+2} + 5 \cdot 9^n, n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Demonstrați că:  $27 \mid 2^n + 3 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 2^{n+2}, n \in \mathbb{N}$   
 $54 \mid 2^n + 3 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 2^{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$

**SUBIECTUL II:**

- a) Aflați  $\overline{abc}$ , astfel încât numărul  $n = \overline{abcabc} - 2 \cdot \overline{abc00}$  să fie pătrat perfect.  
b) Aflați  $\overline{abcd}$ , astfel încât numărul  $n = \overline{abcd000} - 55 \cdot \overline{abcd}$  să fie cub perfect.

\*\*\*

**SUBIECTUL III**

Numerele naturale a, b, c împărțite la 4 dau cături numere impare consecutive și resturi nenule diferite.

- a) Arătați că  $a+b+c$  se divide cu 6;  
b) Determinați valoarea minimă a sumei  $a+b+c$ .

\*\*\*

**SUBIECTUL IV**

Aflați numărul  $\overline{xy}$  știind că  $12 \cdot \overline{xyx} = 25 \cdot \overline{yxy}$ .

**NOTĂ:** Toate subiectele sunt obligatorii.

*Timp de lucru: 3 ore*

*Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte*

I.S.J. Dâmbovița

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VI-a**

**SUBIECTUL I**

a) Demonstrați că numărul  $a = \frac{13}{15} + \frac{1515}{1313} + \dots + \frac{1515\dots15}{1313\dots13}$  (13 termeni) este natural.

b) Determinați numerele  $x, y, z$  naturale știind că  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$  și  $5x+7y+3z=142$ .

c) Determinați numerele naturale  $a, b, c$ , astfel încât  $\frac{a}{a+b} = \frac{2b}{b+2} = \frac{a+c}{c+3}$ .

**SUBIECTUL II**

Determinați cele mai mici numere naturale consecutive  $a, b, c, d$  ( $a < b < c < d$ ) știind că  $a$  se divide cu 10,  $b$  se divide cu 9,  $c$  se divide cu 8 iar  $d$  se divide cu 7.

\*\*\*

**SUBIECTUL III**

Două unghiuri complementare au măsurile exprimate prin numere naturale al căror raport este  $\frac{0,1(a)}{0,(b)}$  ( $a$  și  $b$  cifre în sistemul de numerație zecimal).

Aflați măsurile celor două unghiuri dacă  $a$  este un divizor propriu al lui  $b$ .

\*\*\*

**SUBIECTUL IV**

Fie unghiul propriu  $AOB$  și punctele  $M$  și  $N$ ,  $M$  în interiorul unghiului  $AOB$  iar  $N$  în exteriorul unghiului  $AOB$ . Semidreapta  $[OP$  este bisectoarea unghiului  $AOM$ ,  $m(\sphericalangle POB) = 60^\circ$  și  $m(\sphericalangle BOM) = 2m(\sphericalangle BON)$ . Dacă  $[OQ$  este bisectoarea unghiului  $AOP$ , să se arate că  $\sphericalangle NOQ$  este drept.

**NOTĂ:** Toate subiectele sunt obligatorii.

*Timp de lucru: 3 ore*

*Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte*

**SUBIECTUL I**

a) Calculați: 
$$\left[ (5+2\sqrt{6})^{2008} + \frac{1}{(5-2\sqrt{6})^{2008}} \right] \cdot \frac{(10-4\sqrt{6})^{2008}}{2^{2009}} .$$

b) Demonstrați că:  $|x+a|+|x-a| \geq 2|a|, (\forall) a, x \in \mathbb{R}$  și apoi deduceți că, dacă  $a, b \in (0; +\infty)$ , atunci  $|x+a|+|x+b|+|x-a|+|x-b| \neq a+b, (\forall) x \in \mathbb{R}$ .

\*\*\*

**SUBIECTUL II**

Aflați ultimele 484 cifre ale numărului  $N = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2008 - 1$ .

\*\*\*

**SUBIECTUL III**

Fie  $BB'$  și  $CC'$  mediane în triunghiul  $ABC$ , iar  $M, N$  puncte pe  $(BC)$  astfel încât  $BM = MN = NC$ . Fie  $AM \cap CC' = \{P\}$  și  $AN \cap BB' = \{Q\}$ . Demonstrați că:

- a)  $PQ \parallel BC$ ;
- b)  $BC = 5PQ$ .

**SUBIECTUL IV**

Fie trapezul  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 3 \cdot CD$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$ . Prin  $O$  se duce

$MN \parallel AB, M \in (AD), N \in (BC), AN \cap DC = \{E\}$  și  $BM \cap CD = \{F\}$ .

- a) Demonstrați că  $ABEF$  este paralelogram;
- b) Dacă trapezul este isoscel, atunci  $ABEF$  este dreptunghi.

\*\*\*

**NOTĂ:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte

I.S.J. Dâmbovița

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VIII-a**

**SUBIECTUL I**

Fie  $a, b, c$  numere naturale nenule. Dacă  $\frac{a\sqrt{2}+b\sqrt{3}}{b\sqrt{2}+c\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$ , atunci

- a)  $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$
- b)  $2a+2b+c \mid 4a^2+c^2$

**SUBIECTUL II**

- a) Determinați numărul întreg  $x$ , astfel încât  $\sqrt{x^2+x+1} \in \mathbb{Q}$ .
- b) Fie  $a, b, c$  numere reale.

Demonstrați că  $\max\{a^2-b, b^2-c, c^2-a\} \leq -\frac{1}{4}$  dacă și numai dacă  $a=b=c=\frac{1}{2}$ .

\*\*\*

**SUBIECTUL III**

- a) Demonstrați că  $(\forall) x, y > 0, x < y$ , avem  $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$  și deduceți că dacă  $a, b, c > 0$  și

$$a < b+c \text{ atunci } \frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

- b) Demonstrați că  $(\forall) a, b > 0$  și  $x, y \in \mathbb{R}$  avem  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$  apoi deduceți că

$$\text{dacă } a, b, c, d > 1, \text{ atunci } \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16.$$

\*\*\*

**SUBIECTUL IV**

Fie  $ABCD A' B' C' D'$  un paralelipiped dreptunghic cu  $AB = 18\text{cm}$ ,  $BC = 60\text{cm}$ ,  $AA' = 80\text{cm}$  și  $M$  mijlocul muchiei  $BB'$ . Determinați:

- a) Aria secțiunii determinate de planul  $A'DM$  în paralelipiped;
- b) Cosinusul unghiului format de planele  $A'DM$  și  $ABC$ .

**NOTĂ:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte