I.S.J. Dâmbovița

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

a) Calculați: $\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2008}+\dfrac{1}{\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2008}}\right]\cdot\dfrac{\left(10-4\sqrt{6}\right)^{2008}}{2^{2009}}$.

b) Demonstrați că: $|x+a|+|x-a|\geq 2|a|,(\forall)a,x\in\mathbb{R}$ și apoi deduceți că, dacă $a,b\in(0;+\infty)$, atunci $|x+a|+|x+b|+|x-a|+|x-b|\neq a+b$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

***

SUBIECTUL II

Aflați ultimele 484 cifre ale numărului $N=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2008-1$.

***

SUBIECTUL III

Fie BB' și CC' mediane în triunghiul ABC, iar M,N puncte pe (BC) astfel încât $BM=MN=NC$. Fie $AM\cap CC'=\{P\}$ și $AN\cap BB'=\{Q\}$. Demonstrați că:

a) $PQ\parallel BC$;

b) $BC=5PQ$.

SUBIECTUL IV

Fie trapezul ABCD, $AB\parallel CD$, $AB=3\cdot CD$, $AC\cap BD=\{O\}$. Prin O se duce $MN\parallel AB, M\in(AD), N\in(BC), AN\cap DC=\{E\}$si $BM\cap CD=\{F\}$.

a) Demonstrați că ABEF este paralelogram;

b) Dacă trapezul este isoscel, atunci ABEF este dreptunghi.

***

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte

I.S.J. Dâmbovița

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

Fie a,b,c numere naturale nenule. Dacă $\frac{a\sqrt{2}+b\sqrt{3}}{b\sqrt{2}+c\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$, atunci

a) $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$

b) $2a+2b+c \mid 4a^2+c^2$

SUBIECTUL II

a) Determinați numărul întreg x, astfel încât $\sqrt{x^2+x+1} \in \mathbb{Q}$.

b) Fie a,b,c numere reale.

Demonstrați că $\max\left\{a^2-b, b^2-c, c^2-a\right\} \le -\frac{1}{4}$ dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

***

SUBIECTUL III

a) Demonstrați că $(\forall)\, x, y > 0, x < y,$ avem $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ și deduceți că dacă $a,b,c > 0$ și $a < b+c$ atunci $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$.

b) Demonstrați că $(\forall)\, a,b > 0$ și $x, y \in \mathbb{R}$ avem $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \ge \frac{(x+y)^2}{a+b}$ apoi deduceți că dacă $a,b,c,d > 1$, atunci $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \ge 16.$

***

SUBIECTUL IV

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 18cm$, $BC = 60cm$, $AA' = 80cm$ și M mijlocul muchiei BB'. Determinați:

a) Aria secțiunii determinate de planul $A'DM$ în paralelipiped;

b) Cosinusul unghiului format de planele $A'DM$ și ABC.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte