Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

Concursul de matematică „Dan Barbilian”,
Curtea de Argeş, 24.11.2007

Clasa a VII-a

1. a) Determinaţi cardinalul mulţimii: $\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{Q}_+ \,\middle|\, \frac{3px+3p+1}{px+1} \in \mathbb{N} \right\}$, unde p este un număr natural dat.

b) Determinaţi numerele naturale m şi n astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$10 \cdot 2^m + 5 \cdot 2^n = 2^{m+n} + 32.$$

2. a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $2^x - 3^y = 7$.

b) Arătaţi că nu există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^2 + b^2 - 16c = 6$.

3. Se consideră trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle DAB) = 15°$, $m(\sphericalangle CBA) = 75°$, $AB = 10$ cm, $CD = 4$ cm. Fie E mijlocul lui $[AB]$ şi F mijlocul lui CD. Calculaţi lungimea segmentului $[EF]$.

4. În triunghiul ABC măsurile unghiurilor A, B, C sunt direct proporţionale cu 2, 3, 4 iar I este punctul de intersecţie a bisectoarelor triunghiului. Calculaţi valoarea raportului $\frac{AI}{BC}$.

Probleme selectate de prof. Chirciu Marin

Notă: Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Soluții şi barem (clasa a VII-a)

1. a) $\frac{3px+3p+1}{px+1}=n$, $n\in\mathbb{N}$ ....(1p)

$\Rightarrow\ x=\frac{n-3p-1}{p(3-n)}\geq 0\ \Rightarrow n\in\{4, 5, 6, \ldots, 3p+1\}$ ....(1p)

Deducem card$\mathcal{A}=3p-2$ ....(1p)

b) Notând $2^m=a$, $2^n=b$ obținem $a, b\in\mathbb{N}$ şi $10a+5b=ab+32$ ....(1p)

$\Leftrightarrow b\cdot(a-5)=10a-32\Rightarrow b=\frac{10a-32}{a-5}\Leftrightarrow b=10+\frac{18}{a-5}$ . ...(1p)

Din $b\in\mathbb{N}$ rezultă $a-5\in\mathcal{D}_{18}$. Convin $(a, b)\in\{(2, 4); (8, 16)\}$ .... (1p)

de unde $(m, n)\in\{(1, 2); (3,4)\}$ . ...(1p)

2.a) Observă soluția (3, 0) ....(1p)

Scrie $2^2(2^{x-2}-1)=3(3^{y-1}+1)$ ....(1p)

Deduce că y = 2 şi $x=4$, folosind teorema fundamentală a aritmeticii ....(1p)

b) Presupunem prin absurd că există $a, b, c\in\mathbb{Z}$ astfel încât $a^2+b^2-16c=6$. Rezultă că a^2+b^2 este număr par ....(1p)

Distingem cazurile:

i) a, b pare; $a=2k$, $b=2p$, $k, p\in\mathbb{Z}$. Avem $4k^2+4p^2=16c+6\Leftrightarrow 2k^2+2p^2=8c+3$, imposibil, deoarece membrul stâng este par şi membrul drept este impar ....(2p)

ii) a, b impare; $a=2k+1$, $b=2p+1$, $k, p\in\mathbb{Z}$. Avem $(2k+1)^2+(2p+1)^2=16c+6\Leftrightarrow 4k^2+4k+4p^2+4p=16c+4\Leftrightarrow k(k+1)+p(p+1)=4c+1$, imposibil, deoarece membrul stâng este par şi membrul drept este impar. ....(1p)

3. Fie P şi Q intersecțiile dreptei AB cu paralelele duse prin F la DA, respectiv CB. ....(1p)

Deoarece $m(\sphericalangle FPQ)=m(\sphericalangle DAB)=15°$ şi $m(\sphericalangle FQP)=m(\sphericalangle CBA)=75°$, rezultă că $m(\sphericalangle PFQ)=90°$ . ...(1p)

Avem $ADFP$ şi $BCFQ$ paralelograme,deci $AP=DF$ şi $BQ=FC$. .... (1p)

Cum $DF=FC$ şi $AE=BE$ obținem că E este mijlocul lui $[PQ]$ . ...(1p)

Cum $[FE]$ este mediană în triunghiul dreptunghic PFQ rezultă că $FE=\frac{PQ}{2}$ .... (1p)

Dar $PQ=AB-CD=10$ cm – 4 cm = 6 cm . ...(1p)

Deducem că $EF=3$ cm.. (1p)

4. Din $\frac{m(\sphericalangle A)}{2}=\frac{m(\sphericalangle B)}{3}=\frac{m(\sphericalangle C)}{4}=\frac{180^\circ}{2+3+4}=20^\circ$, obținem $m(\sphericalangle A)=40°$, $m(\sphericalangle B)=60°$, $m(\sphericalangle C)=80°$. ....(1p)

Fie $[CD$, $D\in(AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle BCD)=60°$ ....(1p)

Din $\triangle BCD$ echilateral obținem $BC=CD$ (1) ....(2p)

Avem $m(\sphericalangle ACD)=80°-60°=20°$, $m(\sphericalangle IAC)=40°:2=20°$. Rezultă $\triangle IAC\equiv\triangle DCA$ (ULU) $\Rightarrow IA=CD$ (2) ....(2p)

Din (1) şi (2) obținem că $AI=BC$, deci $\frac{AI}{BC}=1$ .... (1p)

Notă: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Argeş

Concursul de matematică „Dan Barbilian”,
Curtea de Argeş, 24.11.2007

Clasa a VIII-a

I. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n} \le x \le \sqrt{n+2007} \}$.

a) Aflaţi n astfel încât $card\, A = 44$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural n astfel încât $A = \varnothing$.

II. Dacă $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_n = \left\{ (a,b) \,\middle|\, \frac{a}{b} \in (1,2), \frac{b}{n} \in (2,3) \right\}$, atunci:

a) Arătaţi că nu există n astfel încât $(20;7) \in A_n$.

b) Determinaţi valorile lui n pentru care $(20;15) \in A_n$.

III. Se consideră patru puncte necoplanare A, B, C, D astfel încât $AB = CD = 2$ cm , $BC = AD = \sqrt{3}$ cm .

a) Să se arate că $m(\sphericalangle(AB,CD)) < m(\sphericalangle(BC,AD))$.

b) Dacă $AC = BD = \sqrt{7}$ şi E este simetricul punctului C faţă de mijlocul O al segmentului $[BD]$, să se arate că $BC \perp AE$.

IV. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a ($a>0$). Se consideră punctele $K \in [AB]$, $L \in [CC']$, $M \in [D'A']$.
Determinaţi situaţia în care $\Delta\, MKL$ este echilateral .

Probleme propuse de prof. Codeci Daniel , Şc.Nr.1 „Carol I “ Curtea de Argeş

Notă: Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.