CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

DIMITRIE POMPEIU

Ediția a XI-a, 13-15 mai 2011, Botoșani

CLASA A VII-A

Problema 1. *Uite telescopul!*

a) i) Demonstraţi că pentru orice număr natural k, avem

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1}\right).$$

ii) Fie $A = \frac{2^2}{1\cdot 3} + \frac{4^2}{3\cdot 5} + \frac{6^2}{5\cdot 7} + ... + \frac{2010^2}{2009\cdot 2011}$. Să se arate că

$$1005 < A < 1005,5.$$

Gazeta Matematică, enunţ modificat

b) Determinaţi numerele reale x, y, z din egalitatea

$$\sqrt{x+2009} + \sqrt{y-2010} + \sqrt{z+2011} = \frac{x+y+z+2037}{6}.$$

Problema 2. *Întâlnire neprincipială.*

a) Într-un triunghi dreptunghic ABC, înălţimea $[AD]$, bisectoarea $(BE$ şi mediana $[CM]$ sunt concurente. Demonstraţi că există un triunghi dreptunghic având lungimile laturilor egale cu AD, BD şi DC.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $\frac{x}{y} = \frac{x-y+1}{x-y-1}$.

Problema 3. *Paralele printre paralele.*

Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD, AB > CD$ şi punctele $M \in (AD)$, $N \in BC$, astfel încât $MC \parallel NA$.

a) Demonstraţi că $MB \parallel ND$.

b) Dacă $\frac{MC}{AN} = \sqrt{\frac{CD}{AB}}$, demonstraţi că dreapta MN este paralelă cu bazele trapezului şi determinaţi lungimea segmentului MN.

Problema suplimentară. *Căutaţi ajutor în afară!*

În interiorul unui triunghi echilateral ABC se consideră punctul P astfel încât $PA = 1, PB = \sqrt{2}$ şi $PC = \sqrt{3}$. Determinaţi lungimea laturii triunghiului.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzător de la 0 la 7 puncte.