Concursul Național de matematică ARHIMEDE
Ediția a VII-a, etapa a II-a, 27 februarie 2010
Clasa a IV-a

I.(4p) a) Efectuați:

$$(2010 \cdot 191 + 2010 \cdot 316 - 407 \cdot 2010) : 3$$

(2p) b) Să se afle cel mai mic număr natural de două cifre care împărțit la un număr de o singură cifră dă restul 6.

(3p) c) Aflați numărul "a" dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

$$x + a = 424$$

$$y + a = 578$$

$$z + a = 397$$

$$x + y + z = 562$$

II.(3p) a) Calculați necunoscuta "a" știind că:

$$(a : a + 2a - a \cdot 1 + 0 \cdot a + a : 1 + 3a) : 13 = 42$$

(3p) b) Salariul anual al unui prezentator TV este de 50 000 € (euro) și o mașină. După 7 luni el părăsește locul de muncă și primește 25 000 € și o mașină. Cât valorează mașina? (El este plătit cu aceeași sumă în fiecare lună).

(3p) c) Câte numere naturale mai mici decât 1000 conțin cifra 2 de exact două ori? Calculați suma lor.

III.(4p) a) Andrei este filatelist. El îi spune prietenului său" Dacă mi-ai da înșesitul numărului de timbre care îmi lipsește până la 800, atunci aș avea de trei ori mai multe timbre decât acum." Câte timbre are Andrei?

(5p) b) Andra are 78 de bomboane cu lapte și fructe. Ea face grămezi din câte 3 bomboane cu lapte și 4 bomboane cu fructe și grămezi cu câte 3 bomboane cu fructe, folosind toate bomboanele. Ştiind că a obținut 14 grămezi, să se afle câte bomboane cu fructe are.

IV. (3p) a) Care este termenul următor în șirul:

3 ; 6 ; 30 ; 870 ; ...

b) Elevii unei clase au participat la cules de fructe. Ei s-au împărțit în două echipe, formate din același număr de elevi. Fiecare elev a cules câte 9 kg sau 10 kg. Cantitatea totală culeasă a fost 178 kg.

(3p) 1) Câți elevi erau în fiecare echipă?

(3p) 2) Câți elevi, din fiecare echipă, au cules câte 9 kg și câți elevi au cules câte 10 kg?

Notă: Punctajul maxim pentru fiecare subiect se va obține doar dacă răspunsul este însoțit de justificare (rezolvare completă).Timp de lucru 2 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE
Ediția a VII-a, etapa a II-a, 27 februarie 2010
Clasa a V-a

I.(3p) a) Determinați câtul și restul împărțirii lui $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2010$ la 12.

(3p) b) Dacă $A \subset B$ și cardinalul mulțimii A este 2^5 iar cardinalul mulțimii B este 2^4, calculați cardinalul mulțimii $A \setminus B$.

(3p) c) Calculați: $(3^4 - 3^3) : (3^3 - 3^2)$

II. Se consideră numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ care verifică condiția: $\overline{ab} = 2 \cdot \overline{cd}$.

(4p) a) Aflați restul împărțirii unui astfel de număr la 67.

(5p) b) Să se arate că suma tuturor acestor numere este divizibilă cu 2010.

Cristina Ichim

III. Se consideră mulțimea $A = \{8, 19, 30, 41, \ldots, 2010\}$ și o submulțime B a lui A, formată din 93 de elemente.

Se cere:
(4p) a) Aflați cardinalul mulțimii A ;

(5p) b) Să se arate că în submulțimea B există două elemente a căror sumă este 2029.

N.M. Goșoniu

IV. (4p) a) Determinați numerele a și b știind că

$$2^a + 3^b = \overline{ab}$$

(5p) b) Demonstrați că:

$$\overline{abc}^{1340} < \overline{xyz}^{2010}$$

pentru orice numere $\overline{abc}$ și $\overline{xyz}$.

Traian Preda

Notă: Punctajul maxim pentru fiecare subiect se va obține doar dacă răspunsul este însoțit de justificare (rezolvare completă).
Timp de lucru 2 ore și 30 minute. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE
Ediția a VII-a, etapa a II-a, 27 februarie 2010

Clasa a VI-a

I.Considerăm numerele raționale:

$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ și $b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

(3p) 1) Calculați : $a + b$

(3p) 2) Calculați $a^2 + b^2$

(3p) 3) Rezolvați ecuația: $ax = b$

II.(3p) 1) Determinați mulțimea: $A = \left\{\overline{ab} \middle| \frac{\overline{ab}}{2a+5b} \, este\ fracție\ echiunitară\right\}$

2) Se consideră fracția

$\frac{2^m+3^m}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $m \in \mathbb{N}^*$.

(3p) a) Să se demonstreze că pentru m impar, fracția este reductibilă.

(3p) b) Să se afle toate perechile (m, n) care au proprietatea că $m \cdot n = 2010$ și fracția dată este ireductibilă.

Traian Preda

III. Fie $\Delta\, ABC$ cu $[AB] \equiv [AC]$ și punctele M și N aflate în semiplane opuse față de BC cu următoarele proprietăți: M se află în interiorul $\Delta\, ABC$ și $\measuredangle BAM \equiv \measuredangle CAM$ iar N se află în exteriorul Δ ABC și $[NB] \equiv [CN]$.

Să se demonstreze că:

(3p) a) Δ BAM $\equiv$ ΔCAM

(3p) b) Δ BMN $\equiv$ Δ CMN

(3p) c) Punctele A, M, N sunt coliniare.

IV.(3p) a) Să se arate că nu există numere naturale x și y astfel încât $x^2 + y^2 = 2010$.

C. Ichim

(3p) b) Să se calculeze restul împărțirii lui 8^{2010} la 13.

(3p) c) Să se calculeze restul împărțirii lui 8^{2010} la 143.

N.M. Goșoniu

Notă: Punctajul maxim pentru fiecare subiect se va obține doar dacă răspunsul este însoțit de justificare (rezolvare completă).Timp de lucru 2 ore și 30 minute. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE
Ediția a VII-a, etapa a II-a, 27 februarie 2010
Clasa a VII-a

I.Se consider numerele:

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n}, unde\ n \geq 2.$$

Arătați că:

(2p) a) $a_4 = \frac{23}{24}$

(2p) b) $\frac{n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n}$

(2p) c) $t_2 + t_3 + \cdots + t_{2010} < 1$, unde $t_n = \frac{n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$

(3p) d) Aflați cel mai mic număr natural n astfel încât $t_2 + t_3 + \cdots + t_n > \frac{2009}{2010}$.

II. (4p) 1) Se dau numerele reale:

$a = \sqrt{2^{100} + 2}$; $b = \sqrt{\frac{1+2+3+\cdots+99}{2200}}$; $c = \sqrt{3\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot \ldots \cdot 3^{123}}$

Determinați $\{a, b, c\} \cap \mathbb{Q}$.

C.Godeanu-Matei

(5p) 2) Să se determine numerele prime și distincte $\overline{ae}$, $\overline{be}, \overline{ce}$ și $\overline{de}$ știind că satisfac relația :

$$\overline{ae} + \overline{be} + \overline{ce} + \overline{de} = \overline{ba6}$$

Ștefan Marica, Drobeta Tr.-Severin

III. Fie $ABCD$ -trapez isoscel cu baza mare $AB = 2a$, baza mică $CD = a$, iar diagonala AC -bisectoarea unghiului A.

(3p) a) Să se arate că $AC \perp BC$.

(3p) b) Să se calculeze perimetrul trapezului în funcție de a.

(3p) c) Diagonalele trapezului se taie în E. Să se găsească valoarea raportului $\frac{AE}{EC}$.

IV. Se consideră triunghiul isoscel ABC $(AB \equiv AC)$ și punctele $M \in [AB], N \in [AC]$ astfel încât $AM \equiv NC$. Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor $[NB]$ respectiv $[CM]$, să se demonstreze că:
(3p) a) $2PQ = MN$

(6p) b) $\frac{MR\cdot MS}{NS\cdot NR} = \frac{AM}{AN}$ și $\frac{NS}{SM} + \frac{MR}{RN} = 1$, unde $\{R\} = AP \cap MN$ și $AQ \cap MN = \{S\}$.

Traian Preda

Notă: Punctajul maxim pentru fiecare subiect se va obține doar dacă răspunsul este însoțit de justificare (rezolvare completă).Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE
Ediția a VII-a, etapa a II-a, 27 februarie 2010
Clasa a VIII-a

I.Se consideră expresiile:

$E(x)=\frac{x^2+2\sqrt{5}x+5}{x^2-5}$ și $F(x)=E(x)+\frac{1}{E(x)}$. Arătați că:

(3p) a) $E(\sqrt{20})\in\mathbb{N}$ și $F(\sqrt{20})\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$

(2p) b) $E(x)=\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}$

(2p) c) $F(x)=\frac{2x^2+10}{x^2-5}$

(2p) d) Aflați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)\in\mathbb{N}$.

II. Fie numerele reale pozitive a, b, c care verifică relația: $abc=1$. Să se demonstreze că:

(3p) a) $\frac{1+bc}{1+a}=\frac{1}{a}$;

(3p) b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{(1+bc)^2}{(1+a)^2}+\frac{(1+ac)^2}{(1+b)^2}+\frac{(1+ab)^2}{(1+c)^2}$

(3p) c) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1+c}{1+ab}+\frac{1+a}{1+bc}+\frac{1+b}{1+ac}$

Ion Neață, Slatina

III. Se consideră mulțimea:

$$A=\{x_n|x_n=2n^6+9n^3+13, n\in\mathbb{Z}\}$$

(3p) a) Să se determine cel mai mic element al mulțimii A.

(3p) b) Să se afle câte numere de forma x_n-9, cu $x_n\in A$, admit exact patru divizori întregi.

(3p) c) Demonstrați că în orice submulțime a lui A cu cel puțin trei elemente există două numere cu diferența divizibilă cu 7.

Dana Paponiu, Drobeta Tr.-Severin

IV. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia egală cu a. Se consideră M și N mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[CC']$ și punctele $P\in(AD')$, $Q\in(MN)$, $R\in(A'C)$.

(4p) a) Demonstrați că punctele P, Q, R sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{AP}{NQ}=\frac{A'R}{RC}=2$.

(5p) b) Dacă S este mijlocul segmentului PQ atunci $OS\in\left[\frac{a\sqrt{2}}{8},\frac{a\sqrt{5}}{4}\right]$ unde O este centrul cercului.

Traian Preda

Notă: Punctajul maxim pentru fiecare subiect se va obține doar dacă răspunsul este însoțit de justificare (rezolvare completă).Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p.