SUBIECTUL I **FRACŢII "ECHIVALENTE"** **CLASA A VII-A**

Se consideră numerele raţionale strict pozitive a, b, c, d astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

a) Arătaţi că $\sqrt{ac}\in\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\sqrt{bd}\in\mathbb{Q}$.

b) Demonstraţi că $\sqrt{(a+b)(c+d)}\in\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\sqrt{ac}\in\mathbb{Q}$.

c) Este adevărată implicaţia $\sqrt{(a+b)(c+d)}\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{ac}\in\mathbb{N}$? Dar reciproca?

Soluţie. (oficiu **2p**) a) Din $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\in\mathbb{Q}_+^*$ rezultă că $\sqrt{ac}=k\sqrt{bd}$ şi de aici echivalenţa dorită. … **4p**

b) Avem că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)}{(c+d)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}}=\frac{\sqrt{(a+b)(c+d)}}{c+d}$. Însă $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}}=\frac{\sqrt{ac}}{c}=\frac{\sqrt{bd}}{d}=\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bd}}{c+d}$, prin urmare $\sqrt{(a+b)(c+d)}=\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$. **3p**

(*Altfel*: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd=ac+2ad+bd=\left(\sqrt{ac}\right)^2+\left(\sqrt{bd}\right)^2+2\sqrt{ad}\sqrt{bc}=$ $=\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)^2$, deci $\sqrt{(a+b)(c+d)}=\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$ ....**3p**)

Cu notaţiile de la a), obţinem că $\sqrt{(a+b)(c+d)}=(1+k)\sqrt{bd}$. Folosind faptul că $1+k\neq0$ şi punctul a), rezultă echivalenţa dorită. **2p**

c) Pentru $a=b=1, c=d=\frac{1}{4}$ avem că $\sqrt{(a+b)(c+d)}=1\in\mathbb{N}$, dar $\sqrt{ac}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$. Pentru $a=2$, $b=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{2}, d=\frac{1}{6}$ avem că $\sqrt{(a+b)(c+d)}=\frac{4}{3}\notin\mathbb{N}$, dar $\sqrt{ac}=1\in\mathbb{N}$. Rezultă că niciuna dintre cele două implicaţii nu este adevărată. **4p**

SUBIECTUL II **PRODUSE EGALE**

Considerăm mulţimea $M=\{-1,-2,-3,...,-2011\}$. Pentru fiecare submulţime nevidă *A* a lui *M*, calculăm produsul P_A al tuturor elementelor sale; dacă $A=\{a\}$, atunci $P_A=a$.

a) Găsiţi trei submulţimi distincte *A*, *B* şi *C* ale lui *M*, pentru care $P_A=P_B=P_C$.

b) Care este valoarea cea mai mare pe care o poate lua un astfel de produs? Dar cea mai mică?

c) Calculaţi suma tuturor produselor care se obţin. (Dacă valoarea unui produs se repetă pentru mai multe submulţimi ale lui *M*, respectiva valoare se va repeta de acelaşi număr de ori şi în sumă.)

Soluţie. (oficiu **2p**) a) De exemplu, putem considera $A=\{-1,-12\}, B=\{-2,-6\}$ şi $C=\{-3,-4\}$. ... **4p**

b) Cel mai mare produs este $P_{M\setminus\{-1\}}=2011!$, ...**2p**

iar cel mai mic este $P_M=-2011!$. **2p**

c) Dacă *A* este o submulţime nevidă a lui *M* care nu conţine pe –1, atunci $P_A=-P_{A\cup\{-1\}}$. **2p**

După reduceri de termeni, în sumă rămâne doar $-1=P_{\{-1\}}$, deci valoarea sumei cerute este –1. ....**3p**

SUBIECTUL III **GRAFICĂ PE COMPUTER**

Ioana desenează pe monitorul calculatorului, cu ajutorul unui program de grafică pe computer, un triunghi isoscel *ABC* şi ia punctele *D* pe baza (*BC*) şi *E* pe latura (*AB*) astfel încât $\sphericalangle ADE\equiv\sphericalangle ACB$.. Programul folosit îi permite Ioanei să selecteze orice triunghi care apare în desen, să-l mărească sau să-l micşoreze (păstrându-i forma) cu funcţia *zoom*, să-i schimbe poziţia sau să-l rotească, după dorinţă. Numim *transformare* o succesiune oarecare de astfel de operaţii.

a) Demonstraţi că Ioana poate găsi o transformare în urma căreia triunghiul *DBE* să se suprapună exact peste triunghiul *ACD*.

b) Observând alte transformări urmate de suprapuneri de triunghiuri în configuraţia desenată, Ioana redescoperă *relaţia lui Stewart* pentru triunghiul isoscel: $AB^2=AD^2+BD\cdot CD$.

Demonstraţi şi voi această relaţie!

Soluţie. (oficiu **2p**) În urma unei transformări, un triunghi oarecare este înlocuit cu altul asemenea cu el. **2p**

a) Din $\sphericalangle ADE\equiv\sphericalangle ACB$ rezultă că $\sphericalangle CAD\equiv\sphericalangle BDE$, de unde $\Delta ACD\sim\Delta DBE$. **4p**

b) Deoarece $\sphericalangle ADE\equiv\sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle ACB$, deducem că $\Delta ADE\sim\Delta ABD$, deci $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$.

Astfel, $AD^2=AB\cdot AE=AB\cdot(AB-BE)=AB^2-AB\cdot BE$. **4p**

Folosind asemănarea de la punctul a), obţinem că $\frac{AC}{BD}=\frac{CD}{BE}$, prin urmare $AC\cdot BE=BD\cdot CD$. Cum $AB=AC$, rezultă că $AD^2=AB^2-BD\cdot CD$, relaţie echivalentă cu cea cerută. **3p**