Olimpiada de Matematică –etapa judeţeană- Galaţi

13 martie 2010

Clasa a V-a

Problema 1. a) Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, divizibile cu 21, care sunt pătrate perfecte.

b) Să se demonstreze că $77777^3 < 22222^3 \cdot 8^2$.

G.M. 2/2009

Soluţie:

a). Din $\overline{abcd}$ număr pătrat perfect şi multiplu de 21, rezultă că $\overline{abcd} = 3^2 \cdot 7^2 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Se determină valorile lui k astfel încât numărul $3^2 \cdot 7^2 \cdot k^2$ să aibă patru cifre. Rezultă $k \in \{2,3,4\} \Rightarrow \overline{abcd} \in \{1764, 3969, 7056\}$.

b).

$77777^3 = 7^3 \cdot 11111^3$;

$22222^3 = 2^3 \cdot 11111^3$;

$77777^3 < 22222^3 \cdot 8^2 \Leftrightarrow 7^3 \cdot 11111^3 < 11111^3 \cdot 2^3 \cdot 8^2 \Leftrightarrow 7^3 < 8^3 \quad (A)$.

Problema 2. Fie mulţimile:

$A = \{x \mid \ x = 5 \cdot (n+1) + 6^{n+2} + 1001^{n+3} + 5^{n+4}, n \in \mathbb{N}\}$

$B = \{y \mid 4000000 \le y < 4004001, y \in \mathbb{N}\}$

$C = \{z \mid \ z = n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

Să se calculeze: $A \cap C$ şi $B \cap C$.

Marcel Manea, profesor, Galaţi

Soluţie: Ultima cifră a numărului x, $x \in A$ poate fi 2 sau 7.

Ultima cifră a numărului z, $z \in C$ poate fi $0,1,4,5,6$ sau 9. Aşadar, $A \cap C = \varnothing$.

Observăm că $4000000 = 2000^2$, iar $4004001 = 2001^2$. Cum între două numere pătrate perfecte cu bazele numere naturale consecutive, nu mai există alte numere pătrate perfecte, rezultă că $B \cap C = \{2000^2\}$.

Problema 3. Să se determine toate numerele naturale care împărţite la 1000 dau câtul un număr cub perfect, iar restul egal cu pătratul câtului.

G.M. 1/2009

Soluţie: Fie n numărul căutat, atunci

$n = 1000 \cdot c + r,\ 0 \le r < 1000,\ r \in \mathbb{N}.$

Din ipoteză $\Rightarrow \begin{cases} c = x^3,\ x \in \mathbb{N} \\ r = c^2 \end{cases} \Rightarrow r = x^6$

$$\left.\begin{array}{l} r = x^6,\ x \in \mathbb{N} \\ 0 \le r < 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x^6 < 1000 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow x \in \{0,1,2,3\} \Rightarrow n \in \{0,1001,8064,27729\}$$

Problema 4. Suma a 12 numere naturale este 2010. Împărţind fiecare dintre aceste numere la numărul natural $n,\ n \in \mathbb{N}^*$, obţinem resturi egale cu 3 sau 4. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 41.

a) Câte resturi, dintre cele 12, sunt egale cu 3 ?
b) Să se determine cel mai mic număr natural n care satisface condiţiile din enunţ.

Visilina Guiţă, profesor, Galaţi

Soluţie: a) Presupunem că toate resturile sunt 3, atunci suma lor este 36. Diferenţa 41-36=5 este determinată de diferenţa resturilor 4-3=1.Rezultă că sunt 5 resturi egale cu 4 şi 7 resturi egale cu 3.

b) Fie numerele naturale $a_1, a_2, a_3, ..., a_{12}$ care satisfac condiţiile din problemă.

Fie $c_1, c_2, c_3, ..., c_{12}$ câturile obţinute prin împărţirea numerelor $a_1, a_2, a_3, ..., a_{12}$ respectiv la n.

Atunci:

$a_1 = n \cdot c_1 + 3;\ a_2 = n \cdot c_2 + 3;\ a_3 = n \cdot c_3 + 3;\ a_4 = n \cdot c_4 + 3;\ a_5 = n \cdot c_5 + 3;\ a_6 = n \cdot c_6 + 3;\ a_7 = n \cdot c_7 + 3;$
$a_8 = n \cdot c_8 + 4; a_9 = n \cdot c_9 + 4;\ a_{10} = n \cdot c_{10} + 4;\ a_{10} = n \cdot c_{11} + 4;\ a_{12} = n \cdot c_{12} + 4,\ n > 4.$

Dar, $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{12} = 2010$.

Asadar, $n \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + ... + c_{12}) + 41 = 2010 \Rightarrow n \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + ... + c_{10}) = 1969;$

$1969 = 11 \cdot 179;$

Dar 179 este număr prim(nu se divide cu nici un număr prim mai mic decât 17).

Rezultă că n=11.

www.mategl.com