

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A V-A

15 februarie 2015

(7p).1. Ana, Barbu , Cristian și Dragoș au împreună o suma S de lei ,astfel incat $1782 < S < 2303$, S multiplu de 403. Ana are cu 2 lei mai puțin decât Dragoș, Barbu are cu 4 lei mai mult decât Ana, iar Dragoș are jumătate din suma lui Cristian. Aflați câți lei are fiecare copil.

(7p). 2. Prin împărțirea numerelor naturale $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, scrise în baza 10, la același număr natural nenul, se obțin câturile b, c, respectiv a și resturile c, a, respectiv b.

a) Determinați împărțitorul.

b) Arătați că numărul $\overline{abc}$ este multiplu de 111.

(7p).3. Timp de 10 de zile, Andreea a plantat flori. În fiecare zi a plantat de două ori mai multe flori decât în ziua precedent. Știind că în prima zi a plantat o floare, aflați:

a) Câte flori a plantat în a șaptea zi? Dar în total?

b) În câte și în care zile a plantat Andreea un număr pătrat perfect de flori?

(7p). 4. Arătați că numărul $78^{2015} + 68^{2015}$ este divizibil cu 73.

GM

Timp de lucru 2 ore

Toate subiectele se noteaza 7 puncte

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A- VI-A

15 februarie 2015

1. Se dă următorul șir de numere naturale scrise în ordine descrescătoare :
....., 26, 23, 20,

- a) Aflați primii doi termeni ai șirului scris în ordine crescătoare ;
- b) Aflați suma primilor 20 de termeni ai șirului ;
- c) Demonstrați că nici un termen al șirului nu poate fi pătrat perfect .

2. Se considera ecuația $xy^2 + 2xz^3 = 6y^2z^3$, unde x, y și z sunt numere naturale nenule .

- a) Verificați dacă tripletele $(2, 1, 1)$ și $(2^8, 2^4, 2^2)$ sunt soluții ale ecuației date.
- b) Arătați că ecuația dată are o infinitate de soluții .

Gazeta Matematica

3. Se consideră semidreptele $[OA], [OB], [OC], [OD]$ și $[OE]$ în această ordine. Dacă $m(\sphericalangle BOC) + 10^\circ = m(\sphericalangle AOB)$; $3 \cdot m(\sphericalangle COD) = 4 \cdot m(\sphericalangle BOC)$; $m(\sphericalangle AOE) = 2m(\sphericalangle DOE)$; $3 \cdot m(\sphericalangle AOE) = 5 \cdot m(\sphericalangle BOC)$, atunci :

- a) Aflați $m(\sphericalangle AOB), m(\sphericalangle BOC), m(\sphericalangle COD), m(\sphericalangle DOE)$ și $m(\sphericalangle EOA)$;
- b) Dacă $[OF]$ este bisectoarea $\sphericalangle AOE$ arătați că punctele F , O și C sunt coliniare .

4. Se considera segmentul $[AB]$. Notăm M mijlocul lui $[AB]$, M_1 mijlocul lui $[BM]$, M_2 mijlocul lui $[M_1A]$, M_3 mijlocul lui $[M_2B]$, M_4 mijlocul lui $[AM_3]$. Se știe că $M_1M_3 = M_2M_4 + 2\text{cm}$.

- a) Aflați lungimea segmentului $[AB]$.
- b) Notăm cu M_a și M_b mijloacele segmentelor $[M_2M_4]$ și $[M_1M_3]$. Arătați că M_a este mijlocul lui $[AM_b]$.

Nota : Timp de lucru 2 ore .

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A VII-A

15 februarie 2015

1. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$ invers proporționale cu numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{50}$ astfel

încât $\sqrt{\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{49} a_{50}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Determinați mulțimea valorilor pe care le poate lua

expresia $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50}$.

2. Se consideră triunghiul echilateral $\triangle ABC$, $BM \perp AC$, $M \in (AC)$, N simetricul punctului M față de punctul C și punctul P astfel încât $m(\angle PBM) = 90^\circ$ și $PN \parallel BM$. Fie $BC \cap MP = \{O\}$.

a) Să se arate că patrulaterul $BMNP$ este dreptunghi. Patrulaterul $BMNP$ este pătrat? Justificare.

b) Stabiliți natura patrulaterului $STCM$, unde S este mijlocul segmentului (BO) și T este mijlocul segmentului (PO) .

c) Determinați raportul dintre aria suprafeței triunghiulare $\triangle MOC$ și aria suprafeței triunghiulare $\triangle ABC$.

3. a) Arătați că oricare ar fi numerele reale a, b, c avem

$$|a+b| + |a+c| \geq |b-c|.$$

b) Demonstrați că pentru orice număr real x avem

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+2014| \geq 1007^2.$$

GM

4. Se consideră un paralelogram cu un unghi de 120° și având două laturi consecutive de lungimi a și $2a$. Dacă aria suprafeței triunghiulare determinate de bisectoarele a două unghiuri alăturate și una din laturile paralelogramului este de 5cm^2 , aflați aria paralelogramului. Discuție.

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A VIII-A

15 februarie 2015

1. a) Arătați că $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} \mathbb{Q}, \forall k \in \mathbb{N}^*$

b) Calculați suma:

$$S = \frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

2. a) Fie a, b, c -numere raționale pozitive astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Arătați că $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ sunt numere raționale.

b) Determinați perechile de numere naturale pentru care numărul

$$A = 2^{2n} - 3^{2m} + 2^{n+2} + 6$$

Să poată fi scris ca o sumă de două numere prime.

GM

3. Fie ABCD un dreptunghi în care $AB = 5\sqrt{3}$, $BC = 5$ și M un punct nesituat în planul dreptunghiului astfel încât $MA = 10$. Știind că (AE) și (AF) sunt mediane în triunghiurile ADM, respectiv ABM, iar (AG) este bisectoarea unghiului MAC, Ge (AG este bisectoarea unghiului MAC, Ge (MC). Aflați raportul ariilor triunghiurilor EFG și BCD.

4. Se dă trapezul ABCD ($DC \parallel AB$) în care BC este dublul laturii AD, iar $BD \perp AD$. Bisectoarea unghiului C intersectează diagonala BD în E și $\frac{ED}{EB} = \frac{3}{5}$, iar suma dintre BC și baza DC a trapezului este 16.

a) Dacă $2DC + 1 = AB$, calculați aria trapezului.

b) În punctul E se ridică perpendiculara VE pe planul acestuia, VE este media aritmetică a laturilor BC și CD ale trapezului. Aflați distanța de la V la baza AB a trapezului.

Timp de lucru 3 ore, toate subiectele se notează cu 7 puncte.

Barem

FAZA LOCALĂ ,clasa a Va

- (7p).1. Notăm cu a, b,c,d sumele copiilor astfel încât, $S= M_{403}$, $1782 < M_{403} < 2303$,
 $S=2015$, $a+b+c+d=2015$ 2p
Astfel, se pot exprima relațiile $a=d-2$, $b=a+4$, $d=c:2$ 1p
de unde avem că $a=d-2$, $b=d+2$ și $c=2d$ 1p
 $d-2+d+2+2d+d=2015 \Rightarrow 5d=2015 \Rightarrow d=403$ 2p
 $\Rightarrow a=401$, $b=405$, $c=806$ 1p

(7p). 2.

- a) Din TÎR: $D=\hat{I} \cdot C +R$, $R<\hat{I}$, rezultă:

$$\overline{ab} = x \bullet b + c \Rightarrow 10a + b = x \bullet b + c \quad 1p$$

$$\overline{bc} = x \bullet c + a \Rightarrow 10b + c = x \bullet c + a \quad 1p$$

$$\overline{ca} = x \bullet a + b \Rightarrow 10c + a = x \bullet a + b, \quad 1p$$

iar prin adunare membru cu membru rezultă $11(a+b+c)=(x+1)(a+b+c)$ de unde $x=10$. 1p

- b) Se arată că $a=b=c$ prin înlocuirea lui x cu 10 în relațiile din TÎR , de unde rezultă divizibilitatea cu 111. 3p

(7p).3.

- a) Scrierea șirului ce reprezintă numărul de flori plantate zilnic

$$1, 2^1, 2^2, \dots, 2^9 \quad 1p$$

În a șaptea zi a plantat 2^6 flori, adică 64 plante. 1p

$$\text{Calculul sumei } 1+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9=2^{10}-1$$

În total a plantat :

$$1+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9=2^{10}-1=1024-1=1023(\text{flori}) \quad 2p$$

- b) Termenii șirului de la punctul a)

$$1=1^2, 2^2, 2^4, \dots, (2^2)^2, 2^6=(2^3)^2 \text{ și } 2^8=(2^4)^2 \text{ sunt pătrate perfecte} \quad 2p$$

Deci, în prima zi, a treia zi, a cincea zi, a șaptea zi și a noua zi s-au plantat un număr pătrat perfect de flori, în total în cinci zile. 1p

(7p). 4.

$$\text{Folosind formulele: } (a+b)^n = M_a + b^n \quad 2p$$

$$\text{și } (a-b)^{2n+1} = M_a - b^{2n+1} \quad 2p$$

Rezultă că:

$$78^{2015} = (73+5)^{2015} = M_{73} + 5^{2015} \text{ și } 68^{2015} = (73-5)^{2015} = M_{73} - 5^{2015} \quad 2p$$

care prin adunare conduc la divizibilitatea cerută. 1p

BAREME-SOLUTII-PROBLEME-OLIMPIADA DE MATEMATICA-
FAZA LOCALA-14 FEBRUARIE 2014

1.a) Se observa ca $26 = 3 \cdot 9 - 1$; $23 = 3 \cdot 8 - 1$; $20 = 3 \cdot 7 - 1$ si asa mai departe avem ca $2 = 3 \cdot 1 - 1$, deci primii doi termeni ai sirului sunt 2 si $5(=3 \cdot 2 - 1)$

2 puncte .

b) termenul 20 este $3 \cdot 20 - 1 = 59$

$$S = 2 + 5 + 8 + \dots + 59 = (2 + 59) \cdot 20 : 2 = 610$$

1 puncte.

c) orice termen al sirului este de forma $3n-1$. Daca ar fi patrat perfect atunci $3n-1=p^2$, deci $3n=p^2+1$. Daca $p=3k$ atunci $3n=(3k)^2+1$,deci $M_3=M_3+1$ fals , daca $p=3k+1$ atunci $3n=(3k+1)^2+1$,deci $M_3=M_3+2$ fals ,daca $p=3k+2$ atunci $3n=(3k+2)^2+1$,deci $M_3=M_3+5$ fals ,in concluzie nici un termen al sirului nu poate fi patrat perfect .

4 puncte.

2.a) $(2,1,1)$ solutie daca $x=2, y=1$ si $z=1$ care verifica ecuatia .

1 punct.

$(2^8, 2^4, 2^2)$ solutie daca $x=2^8, y=2^4$ si $z=2^2$ verifica ecuatia ,

$$\text{deci } 2^8 \cdot 2^8 + 2 \cdot 2^8 \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^8 \cdot 2^6 : 2^{15}, \text{ avem atunci } 2+1=3 \text{ (A)}$$

2 puncte.

b) Notam $x=2^a, y=2^b, z=2^c$, avem $2^{a+2b} + 2^{1+a+3c} = 3 \cdot 2^{1+2b+3c}$,luam relatiile :

$1+a+3c=a+2b+1$ si $a+2b=1+2b+3c$, deducem $a=1+3c$ si $3c=2b$, $b=3c/2$. Luam $c=2n$, $a=6n+1$ si $b=3n$. Obtinem ca $x=2^{6n+1}, y=2^{3n}$ si $z=2^{2n}$ care verifica ecuatia data pentru orice n numar natural , deci avem o infinitate de solutii .

4 puncte.

$$3.a) \frac{m(\angle COD)}{4} = \frac{m(\angle BOC)}{3} = k \rightarrow m(\angle BOC) = 3k \text{ si } m(\angle COD) = 4k \rightarrow m(\angle AOB) = 3k +$$

$$10^0. \text{ Din } 3 \cdot m(\angle AOE) = 5 \cdot m(\angle BOC) \text{ avem ca } m(\angle AOE) = 5k \text{ si } m(\angle DOE) =$$

$$\frac{5k}{2}, \text{ apoi din suma lor avem ca } k=20 \text{ atunci } m(\angle AOB) = 70^0, m(\angle BOC) =$$

$$60^0, m(\angle COD) = 80^0, m(\angle DOE) = 50^0, m(\angle AOE) = 100^0.$$

5 puncte.

b) [OF bis. Atunci $m(\angle AOF) = 50^0, m(\angle AOC) = 70^0 + 60^0 = 130^0$ si $m(\angle FOC) = 180^0$. Atunci F,O,C coliniare .

2 puncte.

4. Notam $AB=x$, $AM=BM=x/2$, $MM_1=M_1B=x/4$, $AM_1=x/2+x/4=3x/4$, $AM_2=M_2M_1=3x/8$, $AM_3=3x/8+x/8+3x/16=11x/16$, $AM_4=11x/32=M_4M_3$, $M_2M=3x/8-x/4=x/8$, $M_2B=x/8+x/2=5x/8$, $M_2M_3=M_3B=5x/16$, $M_3M_1=5x/16-x/4=x/16$. ($5x/16 > x/8$, $5x/16 < 3x/8$) , $MM_3=x/4-x/16=3x/16$.

3 puncte.

a) Avem atunci $x/16=x/32+2$, deducem $x=64$, $AB=64$ cm.

1 punct

b) $M_2M_a=M_aM_4=x/64$, $M_1M_b=M_bM_3=x/32$. $AM_a=11x/32+x/64=23x/64$ si

$M_aM_b=x/64+x/8+3x/16+x/32=(x+8x+12x+2x)/64=23x/64$, deci M_a este mijlocul lui $[AM_b]$

3 puncte.

BAREM CLASA A VII-A

1. $a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \dots = \frac{a_{50}}{50} = k \Rightarrow a_1 = k, a_2 = 2k, a_3 = 3k, \dots, a_{50} = 50k$ 1p

$$\sqrt{\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{49} a_{50}}} = \frac{1}{|k|} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}}$$
2p

$$|k| = \frac{7}{5} \Rightarrow k \in \left\{ -\frac{7}{5}, \frac{7}{5} \right\}$$
1p

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50} = k \cdot 25 \cdot 51$$
1p

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50} \in \{-1785, 1785\}$$
2p

2. a) De exemplu are toate unghiurile drepte, deci $BMNP$ este dreptunghi.2p

$[BM]$ înălțime în $\triangle ABC \Rightarrow BM < AC \Rightarrow BM < MN \Rightarrow BMNP$ nu este pătrat1p

b) Din $BMNP$ dreptunghi obținem $BP = MN$

$$[ST] \text{ linie mijlocie în } \triangle BOP \Rightarrow ST \parallel BP \text{ și } ST = \frac{BP}{2} = \frac{MN}{2} = MC$$
1p

$$\left. \begin{array}{l} ST = MC \\ ST \parallel MC \end{array} \right\} \Rightarrow STCM \text{ paralelogram}$$
1p

c)

$$STCM \text{ paralelogram} \Rightarrow SO = OC$$
1p

$$BS = SO = OC \Rightarrow A_{\triangle MOC} = \frac{1}{3} A_{\triangle BMC} = \frac{1}{6} A_{\triangle ABC}$$

$$\frac{A_{\triangle MOC}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{1}{6}$$
1p

3a) $|b - c| = |b + a - a - c| = |(b + a) + (-a - c)| \leq |b + a| + |-(a + c)| = |b + a| + |a + c|$ 3p

b) Aplicând punctul a) avem

$$|x + 2014| + |x + 1| \geq 2013$$

$$|x + 2013| + |x + 2| \geq 2011$$

$$|x + 1009| + |x + 1006| \geq 3$$

Însumând avem $|x + 1008| + |x + 1007| \geq 1$ 2p

$$|x + 1| + |x + 2| + \dots + |x + 2014| \geq 1 + 3 + 5 + \dots + 2013 = 1007^2$$
2p

4. Fie paralelogramul $ABCD$. Putem presupune că $AB = 2a$, $AD = a$, $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$, celălalt caz fiind analog. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ADC}$ intersectează laturile $[CD]$ respectiv $[AB]$ în mijloacele acestora N respectiv M 2p

$AMND$ și $BCNM$ sunt romburi.....1p

Avem două cazuri:

I Aria suprafeței triunghiulare determinată de o latură cu lungimea a și bisectoarele a două unghiuri alăturate este de $5cm^2$ și atunci aria paralelogramului este de $40cm^2$ 2p

II Aria suprafeței triunghiulare determinată de o latură cu lungimea $2a$ și bisectoarele a două unghiuri alăturate are este de $5cm^2$ și atunci aria paralelogramului este de $10cm^2$ 2p

Barem clasa a VIII a

1) a) $1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^4 + 3k^2 + 2k^3 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k^2 + k + 1)^2}{k^2(k+1)^2} \quad (2p)$

$$\sqrt{\frac{(k^2 + k + 1)^2}{k^2(k+1)^2}} = \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = \frac{k(k+1) + 1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} \quad 1p$$

$$b) S = \frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{2^2 + 2 + 1}{2 \cdot 3} + \frac{3^2 + 3 + 1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{99^2 + 99 + 1}{99(99+1)} \quad (1p)$$

$$S = (1 + \frac{1}{1 \cdot 2}) + (1 + \frac{1}{2 \cdot 3}) + \dots + (1 + \frac{1}{99 \cdot 100}) \quad (1p)$$

$$S = 99 + 1 - \frac{1}{100} \quad (1p) \quad S = \frac{99 \cdot 101}{100} \quad (1p)$$

2) a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c \mid (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \dots \dots \dots (1p)$

$$a - b = c(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{c}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{c}$$

$$2\sqrt{a} = \frac{a-b+c^2}{c} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{a-b+c^2}{2c} \dots \dots \dots (1p)$$

$$\sqrt{b} = \frac{b-a+c^2}{2c} \dots \dots \dots (1p)$$

b) dacă $n=0 \Rightarrow A=11-3^{2m} \in \mathbb{N}$ dacă $m \in \{0; 1\} \dots \dots \dots (1p)$

Pt $m=0 \Rightarrow A=10=3+7$

$m=1 \Rightarrow A=2$ - nu poate fi scris ca suma de doua numere prime

pt. $n>0 \Rightarrow A$ este impar $\Rightarrow A = 2+p$ cu p nr. prim $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p = 2^n - 3^{2n} + 2^{n+2} + 4 = (2^n + 2)^2 - 3^{2n} = (2^n + 3^m + 2)(2^n - 3^m + 2)$$

$$2^n + 3^m + 2 > 1 \Rightarrow 2^n - 3^m + 2 = 1 \Rightarrow 2^n + 3^m = p \dots \dots \dots (1p)$$

$$2^n + 1 = 3^m \Rightarrow n \text{ este impar}$$

Pt $n=1$ se obține $m=1 \dots \dots \dots (1p)$

Pt $n \geq 3 \Rightarrow 2^n + 1 = \mathcal{M}_4 + 1 \Rightarrow 3^m \in \mathcal{M}_4 + (-1)^n \Rightarrow m$ este par $\Rightarrow m=2k$

$$2^n + 1 = 3^{2k} \Rightarrow 2^n = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1) \Rightarrow n=3 \text{ si } k=1 \Rightarrow m=2 \Rightarrow p=19$$

$$(n; m) \in \{(0,0); (1,1); (3,2)\} \dots \dots \dots (1p)$$

3) ABCD dreptunghi $\Rightarrow AC=10$, deci $\triangle MAC$ isoscel (2p)

(AG bisectoare, deci (AG) este mediană.

FG- linie mijlocie în $\triangle MBC$, deci $FG \parallel BC$, $FG = \frac{BC}{2}$ (1p)

$FG \parallel (BCD)$ (1p)

$EF \parallel (BCD)$ (1p)

$$\triangle EFG \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{A_{\triangle EFG}}{A_{\triangle BCD}} = \left(\frac{FG}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (2p)$$

4) a) $\frac{ED}{EB} = \frac{3}{5} \quad DC + BC = 16$

$$\begin{array}{l} \text{th.bis} \\ \triangle BCD \Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{DE}{BC} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow DC=6 \quad AD=5 \\ BC=10 \quad AB=13 \end{array} \right. \quad (1p)$$

$$\begin{array}{l} \text{T.P} \\ \triangle ABD \Rightarrow DB=12 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} A_{\triangle ABD} = 30 \quad (1p) \\ DF = \frac{60}{13} \\ \text{Finalizare } A_{ABCD} = \frac{570}{13} \end{array} \right. \quad (1p)$$

$$\begin{array}{l} \text{T3} \perp \\ b) VE = \frac{BC+CD}{2} = 8 \text{ cm} \quad (1p) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} EP \perp AB \Rightarrow VP \perp AB \quad (1p) \\ \Rightarrow \triangle BEP \sim \triangle BDF \quad (1p) \\ \text{Finalizare } VP = \frac{\sqrt{48889}}{26} \quad (1p) \end{array} \right.$$