

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numere naturale impare $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$. Demonstrați că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2012}^2} - 1$ este irațional.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b și c cu proprietatea că $a^2 + ab + ac - bc = 0$.

a) Arătați că dacă două dintre numerele a, b și c sunt egale, atunci cel puțin unul dintre cele trei numere este irațional.

b) Arătați că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (m, n, p) cu proprietatea că $m^2 + mn + mp - np = 0$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Se consideră punctele $M, N \in (BC)$, $Q \in (AB)$ și $P \in (AC)$ astfel încât $MNPQ$ este dreptunghi. Demonstrați că dacă centrul dreptunghiului $MNPQ$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $AB = AC = 3AP$.

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctul E pe latura AB . Dreapta DE intersectează dreapta BC în punctul F , iar dreapta CE intersectează dreapta AF în punctul G . Demonstrați că dreptele BG și DF sunt perpendiculare.

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie a și b două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele $a - \sqrt{ab}$ și $b - \sqrt{ab}$ sunt raționale. Arătați că numerele a și b sunt raționale.

Gazeta Matematică

Problema 2. Piramida $VABCD$ are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile laterale sunt congruente. Demonstrați că planul (VCD) formează unghiuri congruente cu planele (VAC) și respectiv (BAC) dacă și numai dacă unghiurile $\angle VAC$ și $\angle BAC$ sunt congruente.

Problema 3. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c . Determinați cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că

$$\frac{1}{ax + b + c} + \frac{1}{a + bx + c} + \frac{1}{a + b + cx} \geq \frac{n}{a + b + c},$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $AD \perp BC$ și $AC \perp BD$. Notăm cu E și F proiecțiile punctului B pe dreptele AD și AC , respectiv. Fie M mijlocul segmentului AB și fie N mijlocul segmentului CD . Arătați că $MN \perp EF$.