CLASA a V-a SOLUŢII

SUBIECTUL 1

Soluţie:

a) $8(3^n + 3^{n+2} + 3^{n+4}) = 8\cdot 3^n(1 + 3^2 + 3^4) = 8\cdot 3^n\cdot 91 = 3^n\cdot 728 = 3^n(729 - 1) = 3^n(3^6 - 1)$....**3p**

b) $24\cdot A + 9 = 24\cdot 3\cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \ldots + 3^{2010}) + 9 = 8\cdot 9\cdot (1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^{1005}) + 9 =$
$8\cdot 9 + 8\cdot 9^2 + 8\cdot 9^3 \ldots + 8\cdot 9^{1006} + 9 = (9 - 1)\cdot 9 + (9 - 1)\cdot 9^2 + (9 - 1)\cdot 9^3 + \ldots + (9 - 1)\cdot 9^{1006} + 9$
$= 9^2 - 9 + 9^3 - 9^2 + 9^4 - 9^3 + \ldots + 9^{1007} - 9^{1006} + 9 = 9^{1007} = (3^{1007})^2$, pătrat perfect. **4p**

SUBIECTUL 2

Soluţie:

a) $n^2 - 2011n = n(n - 2011)$. **1p**
Dacă n este număr natural par, $n \geq 2011$, atunci produsul $n(n - 2011)$ este număr natural par.
Dacă n este număr natural impar, $n \geq 2011$, factorul $n - 2011$ este par şi atunci produsul
$n(n - 2011)$ este număr natural par...**2p**

b) $y^2 - 3y = 3303 + 2^x \Leftrightarrow y(y - 3) = 3303 + 2^x$...**1p**
Avem $y > 3$ şi cum produsul $y(y - 3)$ este număr par, iar 3303 fiind impar, rezultă 2^x este impar
şi de aici $x = 0$..**2p**
Înlocuind $x = 0$ se obţine $y(y - 3) = 3304$, de unde $y \mid 3304$ şi $y - 3 \mid 3304$, rezultă $y = 59$.....**1p**.
Numerele sunt: $x = 0$ şi $y = 59$.

SUBIECTUL 3

Soluţie:

a) $m = \overline{abc}\cdot \mathbf{100000} + \overline{abc}\cdot \mathbf{10} + \overline{abc} = \mathbf{100011}\cdot \overline{abc} = \mathbf{37\cdot 2703}\cdot \overline{abc} \,\vdots\, 37$.................**3p**

b) $n = 300b + 30c + 3a + 700c + 70a + 7b = 73a + 307b + 730c$...**1p**

Calculând $10\cdot \overline{abc} + n = 1000a + 100b + 10c + 73a + 307b + 730c = 1073a + 407b + 740c =$
$37(29a + 11b + 20c) = \mathcal{M}_{37}$...**2p**

Din $10\cdot \overline{abc} + n = \mathcal{M}_{37}$ şi $\overline{abc} \,\vdots\, 37$, rezultă $n \,\vdots\, 37$..**1p**

SUBIECTUL 4

Soluţie:

a) $3^{103} = 27\cdot 3^{100} = (24 + 3)\cdot 3^{100} = 24\cdot 3^{100} + 3^{101} = (4\cdot 3^{100})\cdot 6 + 3^{101}$...**2p**
Cum $3^{101} < 4\cdot 3^{100}$, rezultă câtul este 6 şi restul este 3^{101}...**1p**

b) $4\cdot 3^{103} + 4 = 108\cdot 3^{100} + 4 = 108\cdot 3^{100} + 112 - 108 = (3^{100} - 1)\cdot 108 + 112$. **2p**
Cum $112 < 3^{100} - 1$, rezultă câtul este 108 şi restul este 112...**2p**

CLASA a VI-a SOLUŢII

1. **Soluţie:**

Din egalitatea ultimelor două rapoarte se obţine $y^2(z + 1) = 2340$................................**1p**

Cum $2340 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$ şi y^2 este un pătrat perfect care divide pe 2340, rezultă $y\in\{1, 2, 3, 6\}$..**2p**

Pentru y = 1 $\frac{234}{z+1}=\frac{1}{10}$, rezultă z = 2339 şi din egalitatea cu primul raport x = 200... **1p**

Pentru y = 2 $\frac{234}{z+1}=\frac{4}{10}$, rezultă z = 584 şi cu primul raport x = 300. ....**1p**

Pentru y = 3 $\frac{234}{z+1}=\frac{9}{10}$, rezultă z = 259 şi cu primul raport x = 400. ....**1p**

Pentru y = 6 $\frac{234}{z+1}=\frac{36}{10}$, rezultă z = 64 şi cu primul raport x = 700. ....**1p**

$(x, y, z)\in\{(200, 1, 2339), (300, 2, 584), (400, 3, 259), (700, 6, 64)\}$.

2. **Soluţie:**

a) Fie $\overline{a_1a_2a_3...a_n984}=\overline{a984}$, unde a = $\overline{a_1a_2a_3...a_n}$ **1p**

Avem 1000a + 984 = 948k, care se mai poate scrie 948a + 52a + 948 + 36 = 948k, de aici se deduce 52a + 36 = 948p sau 13a + 9 = 237p, ecuaţie care are o soluţie pentru p = 3 şi a = 54..**2p**

Şi atunci $54984 = 948\cdot 58$, constituie un exemplu de număr natural care se termină cu 984 şi este divizibil cu 948...**1p**

b) Numărul 984 este divizibil cu 8,...**1p**

iar numerele naturale care se termină cu 948 nu sunt divizibile cu 8 ....**1p**

şi atunci nu există numere naturale care se termină cu 948 şi sunt divizibile cu 984..**1p**

3. **Soluţie:**

a) $m(\sphericalangle BOC)=180^0 - m(\sphericalangle BOE) - m(\sphericalangle COF)$ **1p**

$m(\sphericalangle AOD)= 180^0 - m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle DOF)$..............................**1p**

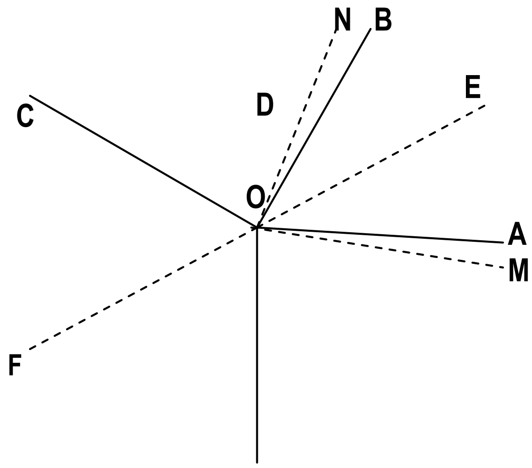
$m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle AOE)$ şi $m(\sphericalangle COF) = m(\sphericalangle DOF)$......................**1p**

b) Dacă se notează $m(\sphericalangle AOB)=6x$, $m(\sphericalangle BOC)=m(\sphericalangle AOD)=7x$ şi $m(\sphericalangle COD)=10x$..**1p**

avem ecuaţia $6x + 7x + 7x + 10x = 360^0$, de unde $x = 12^0$............**1p**

$m(\sphericalangle AOB)=72^0$, $m(\sphericalangle BOC)=m(\sphericalangle AOD)=84^0$ şi $m(\sphericalangle COD)=120^0$.....**1p**

$m(\sphericalangle MON)=m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOC) = 84^0$................**1p**



Soluţie:

4. **a)** Demonstrație..**2p**

b) ΔABM≡ΔACN(ULU), rezultă AM=AN (1)...................**1p**

ΔACM≡ΔABN(LUL), rezultă ∢AMC≡∢ANB (2).......................**1p**

Din (1) rezultă ∢AMN≡∢ANM şi cu (2) se deduce ∢PMN≡∢PNM, de unde PM=PN (3)...**1p**

Din (1), (2), (3), rezultă ΔAMP≡ΔANP(LUL) şi atunci ∢MAP≡∢NAP, cum ∢BAM≡∢CAN se obţine ∢BAP≡∢CAP şi deci [AP este bisectoarea unghiului BAC.....................................**2p**