Dolj Etapa judeţeană a Olimpiadei naţionale de matematică
Craiova, 12 martie 2011

Clasa a V-a

Problema 1. Considerăm fracţiile

$$\frac{a+b}{7}, \frac{b}{6}, \frac{4}{5}, \frac{a+1}{4}, \frac{a}{3}, \frac{1}{2}\,(a, b \in \mathbb{N}^*).$$

Determinaţi numerele a şi b astfel încât printre aceste fracţii numai o fracţie să fie supraunitară şi doar una echiunitară.

Problema 2. a) Demonstraţi că numărul 19^n, unde n este un număr natural nenul, se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.
b) Arătaţi că numărul $m = \underbrace{111...1}_{2011-ori}3$ este multiplu de 13. *G.M. nr.6/2010*

Problema 3. Pentru orice număr natural n vom nota cu D_n mulţimea divizorilor săi şi cu M_n mulţimea multiplilor lui n.

Fie a şi b două numere naturale nenule astfel încât $D_a \cup M_a = D_b \cup M_b$. Arătaţi că $a = b$.

Problema 4. Se dau n numere naturale nenule, distincte, toate strict mai mici decât $2n$. Să se demonstreze că printre ele există unul egal cu n sau două a căror sumă este $2n$.

Clasa a VI-a

Problema 1. O sumă de bani se împarte la 3 persoane, invers proporţional cu 3, 4 şi 5. O persoană constată că primeşte cu 260 de lei mai mult decât dacă aceeaşi sumă ar fi fost împărţită astfel: prima persoană ar fi primit 45% din sumă, a doua 35% din sumă, iar a treia restul. Să se determine suma totală de bani şi cât primeşte fiecare persoană.

Problema 2. Aflaţi numerele naturale a şi b, prime între ele, astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile:

1) $(a, b) \cdot [a, b] = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, unde p, q, r sunt numere naturale nenule, $p < q < r$;

2) $a \cdot b$ are 60 de divizori întregi.

(GM 5/2010)

Problema 3. Să se determine câte numere de forma $\overline{abcd}$ verifică egalitatea $\frac{\overline{abcd} - \overline{abd}}{\overline{abc}} = d, a \neq 0$ şi să se calculeze suma acestora.

Problema 4. Fie ABC un triunghi şi $M \in (BC)$. Considerăm punctele $P \notin Int(\widehat{ABC})$ şi $Q \notin Int(\widehat{ACB})$ astfel încât $m(\widehat{PBA}) = m(\widehat{ABM}), [BP] \equiv [BM]$, $m(\widehat{QCA}) = m(\widehat{ACM}), [CQ] \equiv [CM]$. Dacă punctele P, A, Q sunt coliniare, să se determine măsurile unghiurilor $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{PMQ}$.