Clasa a VI-a

Problema 1.

Soluţie: Fie S suma care se împarte, a, b, c sumele primite şi a', b', c' sumele pe care le-ar primi în cea de-a doua variantă. Avem $S = a+b+c = a'+b'+c'$, $\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{5}}$, de unde $a = \frac{20}{47}S$, $b = \frac{15}{47}S$, $c = \frac{12}{47}S$.

În cea de-a doua variantă avem $a' = \frac{45}{100}S = \frac{9}{20}S$, $b' = \frac{35}{100}S = \frac{7}{20}S$ iar $c' = S - \frac{9}{20}S - \frac{7}{20}S = \frac{4}{20}S = \frac{1}{5}S$. Se observă că $a < a', b < b', c > c'$, deci $c' + 260 = c \Leftrightarrow \frac{1}{5}S + 260 = \frac{12}{47}S$ de unde obţinem $S = 4700$ lei. Astfel, $a = 2000$ lei, $b = 1500$ lei şi $c = 1200$ lei.

Problema 2.

Soluţie: Se ştie că $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$. Rezultă că $a \cdot b = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, iar din formula ce dă numărul divizorilor naturali avem $(p+1)(q+1)(r+1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Cum $0 < p < q < r$, deducem că $p = 1, q = 2, r = 4$. Din $(a, b) = 1$ rezultă variantele $a = 1, b = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$, $a = 2, b = 3^2 \cdot 5^4$, $a = 3^2, b = 2 \cdot 5^4$, $a = 5^4, b = 2 \cdot 3^2$ şi invers.

Problema 3.

Soluţie: Relaţia din enunţ este echivalentă cu $\overline{abc0} - \overline{ab0} = d \cdot \overline{abc}$, de unde rezultă că $u(d \cdot c) = 0$. Avem situaţiile:

1) $d = 0$. Atunci $\overline{abc0} = \overline{ab0}$ -imposibil;

2) $c = 2, d = 5$. Atunci $5 = d = \frac{\overline{ab25} - \overline{ab5}}{\overline{ab2}} = \frac{10 \cdot \overline{ab2} + 5 - \overline{ab2} - 3}{\overline{ab2}} = \frac{9 \cdot \overline{ab2} + 2}{\overline{ab2}} = 9 + \frac{2}{\overline{ab2}}$ -contradicţie.

3) $c = 5, d = 2$. Obţinem, printr-un calcul analog cu cel de mai sus că $2 = d = 9 + \frac{5}{\overline{ab5}}$ -contradicţie.

4) $c = 0$. Obţinem că $d = 9$ iar $\overline{ab}$ poate fi oricare număr natural de două cifre, adică $\overline{ab} \in \{10, 11, ..., 99\}$. Deci avem 90 de numere $\overline{abcd}$ cu proprietatea din enunţ.

Suma acestor numere este: $S = 100 \cdot (10 + 11 + ... + 99) + 90 \cdot 9 = 491310$.

Problema 4.

Soluţie: Din $\Delta PBA \equiv \Delta MBA (LUL)$ deducem că $m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{BAM}) = \alpha$ iar din $\Delta QCA \equiv \Delta MCA (LUL)$ rezultă că $m(\widehat{QAC}) = m(\widehat{MAC}) = \beta$. Dacă P, A, Q sunt coliniare, atunci $m(\widehat{PAQ}) = 2\alpha + 2\beta = 180°$, deci $\alpha + \beta = 90°$. Astfel $m(\widehat{BAC}) = 90°$.

Fie $PM \cap AB = \{S\}$ şi $QM \cap AC = \{T\}$. Din $\Delta PBS \equiv \Delta MBS (LUL)$ rezultă că $m(\widehat{PSB}) = m(\widehat{MSB})$ şi cum acestea sunt suplementare deducem că $PM \perp AB$. Analog se demonstrează că $MQ \perp AC$. Din $PM \perp AB$ şi $AC \perp AB$ rezultă că $AC \parallel PM$ şi cum $MT \perp AC$, deducem că $m(\widehat{PMQ}) = m(\widehat{MTA}) = 90°$.