Etapa judeţeană 2011 Hunedoara

Clasa a V-a

I. Suma dintre vârsta tatălui şi a celor trei copii ai săi este 40 ani. Peste 11 ani vârsta tatălui va fi egală cu suma vârstelor fiilor săi. Ştiind că vârstele copiilor sunt egale, să se determine câţi ani are în prezent tatăl şi fiecare dintre cei trei copii.

II. Într-un grup de 28 copii, fiecare băiat oferă câte un mărţişor fiecărei fete, dar şi fiecare fată oferă câte un mărţişor fiecărei fete. Ştiind că în total s-au oferit 270 mărţişoare, să se determine numărul de băieţi şi numărul de fete.

III. Despre o mulţime nevidă spunem că este **prietenoasă** dacă este formată din numere naturale consecutive a căror sumă este un număr impar.

1) Demonstraţi că orice mulţime formată din 2010 numere naturale consecutive este **prietenoasă**;

2) Dacă A, B sunt **prietenoase** şi $A \cap B$ are exact două elemente, arătaţi mulţimea $A \cup B$ este **prietenoasă**.

IV. Pentru un număr natural n nenul notăm cu $I(n)$, cel mai mare divizor impar al acestui număr.

1) Să se determine $I(2010)$ şi $I(2011)$;

2) Să se arate că pentru orice număr natural n nenul există k, $s \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 2^s(2k+1)$;

3) Să se arate că pentru orice număr natural n nenul avem $I(n) = I(2n)$.

Clasa a VI-a

I. Avem în plan 10 puncte distincte.

1) Care este numărul maxim de drepte determinat de cele 10 puncte?

2) Câte dintre puncte sunt coliniare dacă ele determină în total 40 de drepte?

II. Fie numerele a, b, c, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât a, b, c sunt direct proporţionale cu n, $n+1$ şi respectiv $n+2$.

1) Să se arate că b este media aritmetică a numerelor a şi c.

2) Să se arate că dacă a este divizibil cu n atunci $a+b+c$ este divizibil cu 3.

III. La un turneu de fotbal participă 4 echipe. Fiecare echipă joacă câte o partidă cu fiecare dintre celelalte trei. Se acordă trei puncte echipei care câştigă un meci, câte un punct fiecărei echipe dacă se termină egal şi 0 puncte echipei care pierde. La final se întocmeşte un clasament în care se observă că echipele au punctaje diferite, dar în total au strâns 17 puncte. Ştiind că echipa plasată pe ultimul loc are la final 0 puncte, se cere:

1) Să se arate că meciul dintre echipele de pe locurile doi şi trei nu se poate termina egal.

2) Să se determine punctajul echipei câştigătoare.

IV. Se consideră triunghiurile ABC şi ADC astfel încât B şi D sunt de o parte şi de cealaltă a dreptei AC astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ şi $AB + AD = BC + CD$. Segmentul $[CD]$ se prelungeşte cu segmentul $[DE]$ congruent cu $[BC]$, $D \in (CE)$. Segmentul $[AD]$ se prelungeşte cu segmentul $[DF]$ congruent cu $[AB]$, $D \in (AF)$. Să se arate că:

1) $\triangle FDE \equiv \triangle ABC$;

2) $\triangle CEF \equiv \triangle FAC$;

3) $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$.