Barem de corectare OJM 2010 Clasa a VI-a

1. a) $5\cdot(1+6+6^2+\cdots+6^{2008}) = x^{2009} - 1$ ....**(1p)**
Fie S = $1+6+6^2+\cdots+6^{2008}$, atunci 6S = $6+6^2+6^3+\cdots+6^{2009}$ ....**(1p)**
Prin scăderea celor două relații se obține că 5S = $6^{2009} - 1$ ....**(1p)**
În final, $6^{2009} - 1 = x^{2009} - 1$, deci $x = 6$ ....**(1p)**

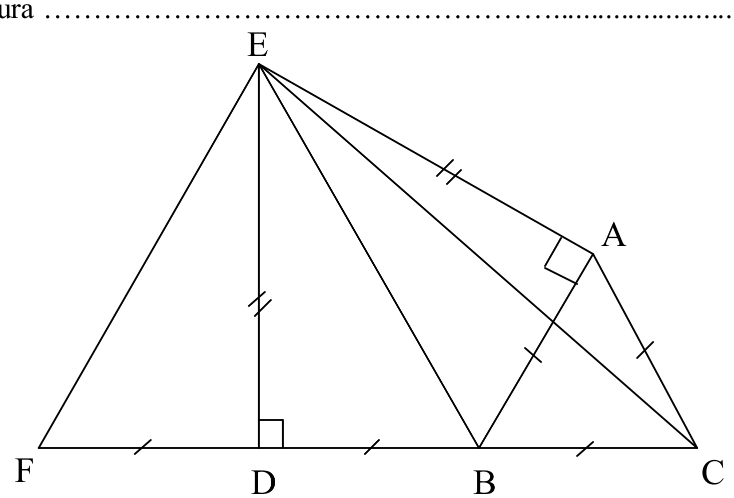
b) $\frac{6^{2009}-6}{35} = \frac{6^{2009}-1-5}{35} = \frac{5(1+6+6^2+6^3+\ldots+6^{2008})-5}{35}$ ....**(1p)**
$= \frac{5\cdot(6+6^2+\cdots+6^{2008})}{35} = \frac{6(1+6+6^2+\cdots+6^{2007})}{7} = \frac{6((1+6)+6^2(1+6)+\cdots+6^{2007}(1+6))}{7}$ ....**(1p)**
$= \frac{7(6+6^3+\cdots+6^{2007})}{7} = 6+6^3+\cdots+6^{2007} \in \mathbb{N}$ ....**(1p)**

2. a) $6a - 4b = 2a + b$, deci $4a = 5b$, adică $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = k$, deci $a = 5k$ şi $b = 4k$ ....**(1p)**
$\frac{2011a-2010b}{2012a-2010b} = \frac{2011\cdot5k-2010\cdot4k}{2012\cdot5k-2010\cdot4k} = \frac{2015}{2020} = \frac{403}{404}$ ....**(1p)**

b) $\frac{a+3}{2} = \frac{b+4}{3} = \frac{c+5}{4}$; $\frac{c+5}{2} = \frac{d+7}{3}$ ....**(1p)**
din cele două relații rezultă că $\frac{a+3}{2} = \frac{b+4}{3} = \frac{c+5}{4} = \frac{d+7}{6}$ ....**(1p)**
$\frac{a+1}{2}+1 = \frac{b+1}{3}+1 = \frac{c+1}{4}+1 = \frac{d+1}{6}+1 \Rightarrow \frac{a+1}{2} = \frac{b+1}{3} = \frac{c+1}{4} = \frac{d+1}{6} = k$ ....**(1p)**
$a = 2k - 1$, $b = 3k - 1$, $c = 4k - 1$, $d = 6k - 1$, de unde $k = 2012$ ....**(1p)**
În final, $a = 4023$, $b = 6035$, $c = 8047$, $d = 12071$ ....**(1p)**

3. Din relația $3a + b + 6c = 51$, cu a, b, c prime, deducem că $a=2, b=3, c=7$ ....**(2p)**
$3\cdot m(\sphericalangle AOB) = 2\cdot m(\sphericalangle BOC)$, deci $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{2} = \frac{m(\sphericalangle BOC)}{3}$ ....**(1p)**
$7\cdot m(\sphericalangle BOC) = 3\cdot m(\sphericalangle COD)$, deci $\frac{m(\sphericalangle BOC)}{3} = \frac{m(\sphericalangle COD)}{7}$ ....**(1p)**
$\frac{m(\sphericalangle AOB)}{2} = \frac{m(\sphericalangle BOC)}{3} = \frac{m(\sphericalangle COD)}{7} = \frac{m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)+m(\sphericalangle COD)}{2+3+7} = \frac{120^\circ}{12} = 10^\circ$ ....**(1p)**
$m(\sphericalangle AOB) = 20^\circ$, $m(\sphericalangle BOC) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle COD) = 70^\circ$ ....**(1p)**
Măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$
este de 50° ....**(1p)**

4. a) Figura ....**(1p)**



$$\Delta FDE \equiv \Delta BAE (LUL\ sau\ CC) \begin{cases} [FD] \equiv [BA] (ip.) \\ [DE] \equiv [AE] (ip.) \\ m(\angle FDE) = m(\angle BAE) = 90^\circ (ip.) \end{cases}$$ ....**(1 p)**

b) $\Delta EBD \equiv \Delta EBA (LLL\ sau\ LUL\ sau\ CC\ sau\ IC) \begin{cases} [EB] \equiv [EB] \\ [BD] \equiv [BA] (ip.) \\ [DE] \equiv [AE] (ip.) \end{cases}$ ....**(1 p)**

$\Rightarrow \angle BED \equiv \angle BEA \Rightarrow [EB = bis. \angle AED$ ....**(1 p)**

SAU:

$BD = BA$ implică punctul B este egal depărtat de laturile EA şi ED ale unghiului $\sphericalangle AE$....**(2 p)**

c) Fie $AE + EC + AC = 92$ (1); $EC - AE = 4$ (2) şi $AE - AC = 8$ (3)

Însumând relațiile (1), (2) şi (3) $\Rightarrow 2EC + AE = 104$ (4) ....**(1 p)**

Însumând relațiile (4) şi (2) $\Rightarrow 3EC = 108$ ....**(1 p)**

$\Rightarrow EC = 36cm$, $AE = 32cm$, $AC = 24cm$ ....**(1 p)**