Inspectoratul Şcolar Judeţean Sălaj

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICA
Etapa judeteana, 12 martie 2011

Clasa a V-a

(7 p) 1. Fie $x=\left[3^{121}:9^{60}+\left(5^3\right)^2:\left(5^2\right)^2\right]:2^2$ şi $y=10^2:\left\{23+34:\left[\left(2\cdot 3^2\right)^2:18-17^0:1^{2009}\right]\right\}$.
Arătaţi că numărul $x^{2009}+2008^y$ nu este pătrat perfect.

2. Numerele naturale se colorează astfel încât se respectă următoarele reguli:
1) 0 este roşu, 1 este galben şi 2 este verde; 2) x şi $x+3$ au aceeaşi culoare, $(\forall)x\in\mathbb{N}$.
Arătaţi că:
(3 p) a) orice număr natural este colorat.
(2 p) b) suma oricăror trei numere de culori diferite este un număr divizibil cu 3.
(2 p) c) 2011 nu este verde.

3. Fie numărul 2^{90} scris în baza zece.
(4 p) a) Demonstraţi că $2^{90}<10^{28}$ **(3 p) b)** Câte cifre are numărul 2^{90}?

(7 p) 4. 11 copii sunt aşezaţi în jurul unei mese rotunde. Suma vârstelor oricăror 3 copii alăturaţi este cel mult 19 ani şi suma vârstelor oricăror 4 copii alăturaţi este cel puţin 25 de ani. Aflaţi suma vârstelor celor 11 copii ştiind că aceasta se exprimă printr-un număr natural.
(Gazeta Matematica nr. 7-9/ 2010)

Clasa a VI-a

(7 p) 1. Numerele naturale nenule $a,\ b,\ c$ sunt invers proporţionale cu numerele $b+c,\ c+a$ respectiv $a+b$. Aflaţi numerele a,b,c ştiind că $a^3+b^3+c^3=2(ab+bc+ca)$.

(7 p) 2. Să se determine toate numerele naturale n şi p pentru care numerele :
$p; p+3^n; p+3^{n+1}; p+3^{n+2}; p+3^{n+3}$ sunt simultan numere prime.

3. Se consideră triunghiul ABC. Perpendiculara din A pe bisectoarea $(BF$, ($F\in AC$) a unghiului ABC, intersecteaza latura (BC) în D. Fie punctul E astfel încât $A\in(BE)$ şi $(AE)\equiv(DC)$. Arataţi că:
(3 p) a) $(BA)\equiv(BD)$ **(2 p) b)** $(DE)\equiv(AC)$ **(2 p) c)** $(FE)\equiv(FC)$

(7 p) 4. În triunghiul ABC bisectoarea unghiului B formează cu latura (AC) un unghi de 45^0. Perpendiculara în punctul B pe latura (BC) intersectează dreapta AC în E. Demonstraţi că triunghiul ABE este isoscel.
(Se ştie că în orice triunghi suma măsurilor unghiurilor este de 180^0)
(Gazeta Matematica nr. 6/ 2010)