OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA JUDEŢEANĂ SUCEAVA 12 MARTIE 2011

CLASA a V-a

1. **a)** Care este paritatea numărului natural obţinut ca diferenţă dintre suma a 2011 numere naturale impare şi suma a 2011 numere naturale pare?

b) Stabiliţi paritatea numărului $A=(n+3)(3n+5)(n+8)+3^n$, unde $n\in\mathbb{N}$.

2. Pe un ecran este scris numărul 32. După fiecare minut numărul este înlocuit cu un altul care este cu 23 mai mare decât produsul cifrelor numărului înlocuit.

a) Ce număr va fi scris pe ecran după 8 minute?

b) Ce număr va fi scris pe ecran după 2 ore şi 15 minute?

3. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi S suma resturilor obţinute prin împărţirea numerelor $1,2,...,100$ la n.

a) Să se calculeze S în cazul $n=5$.

b) Să se determine valorile lui n pentru care $S=100$.

4. Se consideră o mulţime A formată din opt numere naturale de trei cifre. Fiecărui număr i se ataşează ca ***etichetă*** suma celor trei cifre ale sale. Fiecărei submulţimi nevide a mulţimii A i se ataşează un ***cod*** determinat de suma etichetelor numerelor din submulţime.

a) Care este cel mai mare ***cod*** posibil definit ca mai sus?

b) Să se arate că există cel puţin două submulţimi distincte ale mulţimii A cu acelaşi ***cod***.

CLASA a VI-a

1. **a)** Fie p un număr prim mai mare decât 6. Aflaţi ultima cifră a lui p^4.

b) Aflaţi numerele prime p şi q ştiind că $p^4+q^4=29186$.

2. Fie x,y,z numere raţionale pozitive astfel încât $\frac{2x}{3y+4z}=\frac{3y}{2x+4z}=\frac{4z}{2x+3y}$. Calculaţi:

$$(x+3y+2z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{2z}\right).$$

3. Se consideră triunghiurile dreptunghice ΔABC $(AB<BC)$ şi ΔADC astfel încât $m(\sphericalangle ABC)=90^\circ$, $m(\sphericalangle ADC)=90^\circ$, B şi D de o parte şi de alta a dreptei AC şi $[AB]\equiv[CD]$. Dacă $BM\perp AC$, $M\in AC$ şi $m(\sphericalangle ABD)=60^\circ$, demonstraţi că $[BM$ este bisectoarea $\sphericalangle ABD$.

4. Fie triunghiul ABC și punctele $M\in(AB)$, $P\in(AC)$ astfel încât $[BM]\equiv[CP]$. Dacă punctul Q este simetricul lui P față de mijlocul E al segmentului $[BC]$, să se arate că:

a) unghiurile ABQ și BAC sunt suplementare;

b) dreapta determinată de mijloacele segmentelor $[BC]$ și $[MP]$ este paralelă cu bisectoarea unghiului BAC.