CLASA a VI-a

1.

Soluție. **a)** Orice număr prim $p > 6$ are $u(p) \in \{1;3;7;9\} \Rightarrow u\left(p^4\right) = 1$. Cu $u(p)$ am notat ultima cifră a lui p.

b) Dacă $p > 6$ și $q > 6$, atunci $u\left(p^4\right) = u\left(q^4\right) = 1$ și $u\left(p^4 + q^4\right) = 2$, deci relația din enunț nu poate fi adevărată. Deducem că cel puţin unul din numerele p sau q este mai mic decât 6.

Dacă $p = 2 \Rightarrow p^4 = 16 \Rightarrow 16 + q^4 = 29186 \Rightarrow q^4 = 29170 \Rightarrow$ nu există *p* deoarece $29170 \vdots 2$ și $29170 \not\vdots 2^4$.

Dacă $p = 3 \Rightarrow p^4 = 81 \Rightarrow 81 + q^4 = 29186 \Rightarrow q^4 = 29105 \Rightarrow$ nu există *p* deoarece $29105 \vdots 5$ și $29105 \not\vdots 5^4$.

Dacă $p = 5 \Rightarrow p^4 = 625 \Rightarrow 625 + q^4 = 29186 \Rightarrow q^4 = 28561 \Rightarrow q^4 = 13^4 \Rightarrow q = 13$. Deci numerele căutate sunt 5 și 13.

2.

Soluție. $\dfrac{2x}{3y+4z} = \dfrac{3y}{2x+4z} = \dfrac{4z}{2x+3y} = \dfrac{2x+3y+4z}{4x+6y+8z} = \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{2x}{3y+4z} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 4x = 3y + 4z \ (1)$; $\dfrac{3y}{2x+4z} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 6y = 2x + 4z \ (2)$; $\dfrac{4z}{2x+3y} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 8z = 2x + 3y \ (3)$.

Din $(2) \Rightarrow 4z = 6y - 2x$ și înlocuind în (1) obținem $4x = 3y + 6y - 2x \Rightarrow 6x = 9y \Rightarrow 2x = 3y \ (4)$, care înlocuită în (3) ne conduce la $8z = 3y + 3y \Rightarrow 8z = 6y \Rightarrow 4z = 3y \ (5)$. Din (4) și $(5) \Rightarrow 2x = 4z \Rightarrow x = 2z$.

Calculăm în funcţie de x și avem: $(x + 3y + 2z) \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3y} + \dfrac{1}{2z}\right) = (x + 2x + x) \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\right) = 4x \cdot \dfrac{5}{2x} = 10$.

3

Soluție. Din ΔABC, ΔCDA dreptunghice și $[AB] \equiv [CD]$ (ipoteză), $[AC] \equiv [AC]$ (latură comună) rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta CDA(\text{I.C.}) \Rightarrow$ $[BC] \equiv [AD]$ (1), $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DCA$. Atunci:

$m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle DCA) = 90^\circ$.

Din ΔABC, ΔBAD dreptunghice și $[BC] \equiv [AD]$ (1), $[AB] \equiv [AB]$ (latură comună) $\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta BAD(\text{C.C.}) \Rightarrow$

$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABD$. Dar $m(\sphericalangle ABD) = 60°$ și atunci $m(\sphericalangle BAC) = 60°$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, în ΔAOB avem: $m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Din ΔBMA, ΔBMO dreptunghice și $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle BOM$ (au măsurile de $60°$), $[MB] \equiv [MB]$ (latură comună) $\Rightarrow \Delta BMA \equiv \Delta BMO(\text{C.U.}) \Rightarrow \sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle MBO$, dar $[BM \subset Int(\sphericalangle ABD) \Rightarrow [BM$ este bisectoarea $\sphericalangle ABD$.

4

Soluție. **a)** Comparăm ΔPEC și ΔQEB unde avem: $[PE] \equiv [EQ]$ (*E* mijloc $[QP]$), $\sphericalangle PEC \equiv \sphericalangle QEB$ (opuse la vârf) și $[CE] \equiv [EB]$ (*E* mijloc $[BC]$) rezultă că $\Delta PEC \equiv \Delta QEB(\text{L.U.L.}) \Rightarrow$ $[PC] \equiv [QB]$ și $\sphericalangle PCE \equiv \sphericalangle QBE$ (1). Folosind (1)

$\Rightarrow m(\sphericalangle ABQ) + m(\sphericalangle BAC) = [m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle CBQ)] + m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BCA) + m(\sphericalangle BAC) = 180°$ (2).

Deci unghiurile *ABQ* și *BAC* sunt suplementare.

b) Fie *T* mijlocul lui $[MP]$. Dar *E* mijlocul lui $[BC]$ și atunci $[TE]$ linie mijlocie în $\Delta PMQ \Rightarrow TE \parallel MQ$.

Fie $[AD]$ bisectoare în $\Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$.

Din $[PC] \equiv [QB]$ și $[MB] \equiv [PC] \Rightarrow [MB] \equiv [BQ] \Rightarrow \Delta BMQ$ este isoscel cu baza $[MQ] \Rightarrow \sphericalangle BMQ \equiv \sphericalangle BQM$ (3).

În ΔBMQ avem: $m(\sphericalangle MBQ) + m(\sphericalangle BQM) + m(\sphericalangle BMQ) = 180°$, unde ținând cont de relațiile (2) și (3) obținem:

$$2 \cdot m(\sphericalangle BMQ) = 180° - m(\sphericalangle MBQ) = 180° - m(\sphericalangle ABQ) = m(\sphericalangle BAC) \Rightarrow m(\sphericalangle BMQ) = \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2}.$$

Cum și $m(\sphericalangle BAD) = \dfrac{m(\sphericalangle BAC)}{2} \Rightarrow$ $\sphericalangle BMQ \equiv \sphericalangle BAD$. Dar $\sphericalangle BMQ, \sphericalangle BAD$ sunt unghiuri corespondente formate de dreptele *MQ* și *AD* cu secanta *AB* și atunci obținem $MQ \parallel AD$. Din $TE \parallel MQ$ și $MQ \parallel AD \Rightarrow TE \parallel AD$