

Problema 1.

Soluție. Cum $60 = 5 \cdot 12$, împărțim pătratul în 60 de dreptunghiuri cu laturile de 5 respectiv 12 (toate laturile mari ale dreptunghiurilor paralele între ele). 2 puncte

Aria fiecărui dreptunghi este egală cu 60 1 punct

Conform principiului Dirichlet, trei dintre puncte se vor afla în același dreptunghi 2 puncte

ceea ce înseamnă că aria triunghiului determinat de acestea nu va depăși jumătate din aria dreptunghiului. 2 puncte

Problema 2.

Soluție. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și M mijlocul segmentului $[BC]$.

a) $[OM]$ este linie mijlocie în triunghiul PQR , deci $MO \parallel RQ$ și $OM = \frac{RQ}{2}$ 2 puncte

$[OM]$ este mediană în triunghiul dreptunghic BOC , deci $OM = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$; rezultă $RQ = AD$ 2 puncte

b) Dacă $\{T\} = MO \cap AD$, atunci $\angle MBO = \angle MOB = \angle DOT$ 2 puncte

Cum $\angle OCB = \angle TDO$, rezultă $m(\angle OTD) = m(\angle BOC) = 90^\circ$. Deci $MT \perp AD$ 1 punct

Problema 3.

Soluție. a) Numerele naturale pot fi de forma $3k, 3k+1$ respectiv $3k+2$ deci pătratele acestora vor da la împărțirea cu 3 resturile 0 sau 1 2 puncte

b) Din șirul de rapoarte egale $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_7}{7} = 4$, rezultă $a_1 = 4, a_2 = 8, \dots, a_7 = 28$. Prin urmare N este format din $1 \cdot 4$ cifre 1, $2 \cdot 4 = 8$ cifre 2, ... , $7 \cdot 28$ cifre 7 2 puncte

Suma cifrelor lui N este, prin urmare, $S = 4(1^2 + 2^2 + \dots + 7^2) = 560$ 1 punct

Cum 560 dă restul 2 la împărțirea cu 3, N nu poate fi pătrat perfect. 2 puncte

Problema 4.

Soluție. Considerăm mulțimea $A = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2a + 5b, a, b = 1, 2, \dots, 100\}$.

Observăm că $1 \notin A, 3 \notin A$.

Cel mai mare număr par din A este obținut pentru $a = b = 100$ și este 700. Numărul 698 este obținut pentru $a = 99, b = 100$. Cel mai mare număr impar din A este obținut pentru $b = 99, a = 100$, fiind deci 695. Așadar $697 \notin A$ și $699 \notin A$ 2 puncte

Demonstrăm că orice număr natural mai mare sau egal cu 4 și mai mic sau egal cu 696 aparține mulțimii A 1 punct

Dacă $y \leq 500$, fie r restul împărțirii lui y la 5. Astfel $y = 5c + r$ cu $0 \leq c \leq 100$ și $0 \leq r \leq 4$. Dacă r este par, atunci $y = 5c + 2k$, unde $r = 2k$ iar dacă r este impar, atunci $y \geq 5$, deci $c \geq 1$ și $y = 5(c-1) + 2(k+3)$, unde $r = 2k+1$ 1 punct

Dacă $y > 500$, atunci $y = 500 + z$ cu $0 < z \leq 200$. Dacă z este par, atunci $y = 5 \cdot 100 + 2k$, unde $z = 2k$ iar dacă z este impar, atunci $y \leq 695$, deci $z \leq 195$ și $y = 5 \cdot 99 + 2(k+3)$, unde $z = 2k+1$ 1 punct

Suma numerelor din A va fi

$$S = (1 + 2 + \dots + 700) - (1 + 3 + 697 + 699) = 350 \cdot 697$$

Prin urmare, suma elementelor lui M este $\frac{S}{10} = 35 \cdot 697$ 2 puncte