

Concursul Interjudețean "Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița 23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a V -a

Subiectul I. Arătați, că pentru orice număr natural nenul n , numărul 21^n poate fi scris ca o sumă de trei pătrate perfecte.

Subiectul II. a) Aflați suma cifrelor numărului a , unde $a = 2^{4n+1} \cdot 5^{4n+5} - 3$ ($n \in \mathbb{N}$).
b) Determinați cifrele numărului: $x = 100^n - 101^3 \cdot 10^n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 7$.

Subiectul III. Fie numerele naturale de trei cifre, scrise în baza zece, cu proprietatea că numărul format din primele două cifre ale lor este de trei ori mai mare decât numărul format din ultimele două cifre ale acestora. Aflați numerele și arătați că suma cifrelor acestor numere este 13.

Clasa a VI -a

Subiectul I. Fie punctele coliniare $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ situate pe dreapta d în această ordine astfel încât: $A_0A_1 = 1cm$, $A_1A_2 = 2cm$, ..., $A_{n-1}A_n = n$ (cm).

a) Aflați lungimea segmentului $A_{45}A_{99}$ precum și distanța dintre punctele A_0 și M , unde M este mijlocul segmentului $[A_{45}A_{99}]$.

b) Aflați numărul n , dacă lungimea segmentului $[A_0A_n]$ este egală cu 861 cm.

Subiectul II. Numerele naturale nenule a, b, c îndeplinesc simultan condițiile:

i) $a + 2b + 3c = 3000$, și $9b + c = 1000$.

ii) a are 16 divizori, b are 8 divizori și c are 4 divizori. Să se demonstreze că a are patru cifre, b are trei cifre și c are două cifre.

Subiectul III. Se consideră mulțimea: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{abcde}\}$, unde a, b, c, d, e sunt cifre distincte pare în baza 10. Aflați:

a) Cardinalul mulțimii $B = \{x \in A \mid 4 \text{ divide } x\}$.

b) Mulțimea $A \cap C$, unde $C = \{x \in A \mid x = t^2, t \in \mathbb{N}\}$.

Clasa a VII-a

Subiectul I. Aflați cardinalul mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{n^2+21n}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1\}$.

Subiectul II. Numim număr "drag" un număr natural care are exact 4 divizori naturali.

a) Dați un exemplu de trei numere "dragi" consecutive.

b) Să se arate că nu există trei numere "dragi" consecutive astfel încât primul dintre ele să fie par.

Subiectul III. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, astfel încât $AB = AC = AD = CD$ și $m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$. Pe latura AB se ia punctul E , cu $m(\widehat{CEB}) = 30^\circ$. Arătați că dreptele DE și BC sunt paralele.

Clasa a VIII-a

Subiectul I. Rezolvați ecuația: $\frac{x^3+1}{9} + \frac{x^3+2}{10} + \frac{x^3+3}{11} + \dots + \frac{x^3+1012}{1020} = 1012$.

Subiectul II. Se dă suma: $S_n = 1 + \frac{a_1}{1-a_1} + \frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)} + \dots + \frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)}$, unde $a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, $i = \overline{1, n}$. Determinați numerele întregi a_i , $i = \overline{1, n}$ pentru care S_n este număr natural.

Subiectul III. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, punctul M este mijlocul segmentului (BC) , iar punctele P, Q, R, S, R' și S' astfel încât $P \in (AM)$, $Q \in (DM)$, $BP \cap AC = \{R\}$, $CP \cap AB = \{S\}$, $BQ \cap CD = \{R'\}$ și $QC \cap BD = \{S'\}$.

a) Dacă punctele P și Q sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și, respectiv, BCD , arătați că dreapta PQ este paralelă la planul (ABD) .

b) Demonstrați că dreptele SS' și RR' sunt coplanare.