International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
14^{th} Edition 25.03.2011
Râmnicu Vâlcea
CLASA a V-a

1. Prin împărțirea unui număr natural d la 5 se obține câtul a şi restul 3, iar prin împărțirea lui d la 7 se obține câtul b şi restul 5, unde $a,b \in \mathbf{N}$.

a) Poate fi d egal cu 2013 ? Justificați!

b) Aflați restul împărțirii lui d la 35.

c) Arătați că $b = M_5 + 4$.

d) Demonstrați că $a+b \neq 2012$.

Marius Mazilu, Rm. Vâlcea

2. Fie mulțimea $A = \left\{ 5^a \cdot 7^b \middle| \ a,b \in \mathbf{N} \right\}$.

a) Determinați cele mai mici patru elemente din A care au proprietatea că sunt pătrate perfecte.

b) Demonstrați că printre oricare 5 elemente din mulțimea A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Florin Smeureanu şi Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

3. Numerele naturale nenule sunt aşezate într-un tablou astfel:

1 2
3
4 5
6 7
8 9
10 11 12
13 14
15 16 17 18
....

a) Câte numere sunt pe linia n, unde $n \in \{2, 4, 6, 8, ...\}$?

b) Care este al zecelea număr de pe linia 30 ?

c) Demonstrați că pe linia 2010 sunt un număr impar de numere impare.

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

4. Într-un an oarecare, trei luni consecutive conțin exact câte 4 duminici fiecare. Demostrați că una dintre aceste luni este februarie.

Marcel Teleucă, Chişinău

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
SUCCES!

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
14^{th} Edition
25.03.2011
Râmnicu Vâlcea

CLASA a VI-a

1. Să se determine a, $b \in \mathbf{N}$, cu proprietatea că $a \cdot b = 2 \cdot [a;b] + 25 \cdot (a;b) + 30$, unde $[a;b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b, iar $(a;b)$ este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

Maria Pop – Cluj Napoca

2. Fie numărul $n = 4^{2011}$.
   a) Determinați restul împărțirii numărului n la 3;
   b) Demonstrați că n are cel puțin 1207 cifre ;
   c) Eliminăm câteva cifre de la începutul numărului n, pe care le adunăm la numărul rămas. Continuăm procedeul până obținem un număr de zece cifre. Demonstrați că acest număr are cel puțin două cifre egale.

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

3. Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu $m(\angle ABC) = 90^\circ$, iar triunghiul BCD este dreptunghic isoscel cu $m(\angle BCD) = 90^\circ$.
a) Stabiliți dacă [BD este bisectoarea unghiului $\angle ABC$.
b) Fie $P \in (BC)$, $Q \in (CD)$. Dacă $AP \perp BQ$, demonstrați că $AQ \perp DP$.

Notă: Se consideră cunoscut faptul că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.

Dumitru Dobre şi Ştefan Smărăndoiu – Rm. Vâlcea

4. Ceasul Şcolii „*Take Ionescu*" indică timpul sub forma de la 00:00 până la 23:59. Care este timpul minim t, unde $t \in \mathbf{N}^*$, t exprimat în minute, scurs între două afişări ale ceasului, astfel încât acestea să conțină 8 cifre diferite între ele? Justificați!

Marcel Teleucă, Chişinău

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
14^{th} Edition
25.03.2011
Râmnicu Vâlcea

CLASA a VII-a

1. a) Demonstrați că $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1},\ (\forall)k \in \mathbf{N}^*$.

b) Să se arate că $2\sqrt{2012} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2011}} < 2\sqrt{2011}$

Ion Preda – Rm. Vâlcea

2. a) Determinați $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\sqrt{n^2 - 2011}$ să fie număr natural.

b) Demonstrați că există o infinitate de numere $a \in \mathbf{Q}$ astfel încât $\sqrt{ka + 2010} \in \mathbf{Q}$ şi $\sqrt{ka + 2011} \in \mathbf{Q}$, unde $k \in \mathbf{Q}^*$.

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

3. Fie triunghiul *ABC* cu $2m(\angle BCA) = m(\angle CBA)$. Pe mediatoarea segmentului $[BC]$ se consideră punctele *P* şi *Q* astfel încît $\angle CAP \equiv \angle PAQ \equiv \angle QAB.$
Fie $PQ \cap AC = \{D\}$.

a) Arătați că $AQ \cdot DP = AD \cdot PQ.$

b) Demonstrați că $QP = QB.$

c) Arătați că $m(\angle ACB) \neq 15°$.

Cheian Dinis, Chişinău

4. La o conferință au participat 100 de specialişti – chimişti şi alchimişti.
Fiecăruia dintre ei i-a fost adresată întrebarea:
"Dacă nu luăm în considerare persoana dumneavoastră, printre participanții rămaşi sunt mai mulți chimişti sau mai mulți alchimişti ?".
Au fost interogați 51 de participanți. Fiecare dintre ei a răspuns că sunt mai mulți alchimişti. Ştiind că alchimiştii întotdeauna mint, iar chimiştii spun întotdeauna adevărul, care e numărul de chimişti printre participanți ?

Marcel Teleucă, Chişinău

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

SUCCES !

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
14^{th} Edition
25.03.2011
Râmnicu Vâlcea
CLASA a VIII-a

1. a) Aflați $a \in \mathbf{N}$, astfel încât numărul $4a^4 - 28a^3 + 69a^2 - 70a + 26$ să fie pătrat perfect.

b) Determinați $n \in \mathbf{N}$ pentru care numărul $n(2n+9)(4n+14)+157$ este cub perfect.

Ştefan Smărăndoiu şi Vasile Gorgotă, Rm. Vâlcea

2. În triunghiul ABC, fie $m(\angle BAC) = 20^\circ$ şi $m(\angle ACB) = 30^\circ$. **În interiorul** triunghiului se ia un punct M, astfel ca $m(\angle MAC) = m(\angle MCA) = 10^\circ$.

Determinați $m(\angle BMC)$.

Ivailo Kortezov şi Svetlozar Doichev, Sofia

3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Considerăm punctele $M \in (AC)$, $N' \in (A'B')$ astfel încât $CM = A'N'$.

a) Calculați $m(\angle((BB'M),(CC'N')))$;

b) Dacă $(BB'M) \cap (CC'N') = II'$, unde $I \in (ABC)$ şi $I' \in (A'B'C')$, demonstrați că $3 \cdot V_{BCIB'C'I'} \le V_{ABCA'B'C'}$.

Stabiliți poziția punctului M pentru care inegalitatea devine egalitate.

Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

4. Un ceas mecanic avea geamul spart. La orele 12:00:00 trei muşte s-au aşezat pe câte un segment reprezentat de acul orar, minutar, respectiv secundar al ceasului şi au rămas aşezate pe ele la aceeaşi distanță diferită de zero, de centrul discului determinat de cadranul ceasului. Când pozițiile oricăror două ace indicatoare coincideau, cele 2 muşte aşezate pe ele treceau una în locul celeilalte. În cazul în care coincideau pozițiile la toate cele 3 ace indicatoare, doar muştele de pe acul orar şi cel secundar îşi schimbau locul.

Câte rotații complete de forma unui cerc imaginar generat de mişcarea acului pe care se afla , a efectuat fiecare muscă până la ora 24:00:00?

Marcel Teleucă, Chişinău

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

SUCCES !