Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE LAZĂR”
Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011
SIBIU

Clasa a VII-a

1. Pe un cerc sunt 11 numere naturale astfel încât suma oricăror 3 numere alăturate este cel mult 19, iar suma oricăror 4 numere alăturate este cel puţin 25. Să se determine suma celor 11 numere.

GM 12/2010

2. Într-un triunghi ABC avem punctele $P \in (BC)$ şi $O \in (AP)$ astfel ca $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{OBC}) = 30°$. Arătaţi că dacă aria triunghi ABC este de patru ori mai mare decât aria triunghiului OBC, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Emil C. Popa, Sibiu

3. Să se detrmine numerele prime a şi b pentru care $a \cdot b + 7$ şi $ab - 7$ sunt, de asemenea, prime.

Dumitru Acu, Sibiu

4. Fie triunghiul ABC în care $AB = AC$, $m(\widehat{BAC}) < 90°$, iar $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ şi $F \in (AB)$ sunt respectiv picioarele înălţimilor duse din vârfurile A, B respectiv C. Notăm cu $\{H\} = AD \cap BE \cap CF$ (ortocentrul unghiului ABC) şi cu P intersecţia bisectoarei unghiului ABH cu AH. Să se arate că $m(\widehat{AFP}) = 45°$.

Petrică Dicu, Sibiu

Clasa a VIII-a

1) Să se arate că în orice triunghi avem $p^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$,

unde p reprezintă semiperimetrul iar m_a, m_b, m_c respectiv lungimile medianelor.

GM 1/2011

2) Fie $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $n \geq 1$ şi $x > 0$. Arătaţi că au loc inegalităţile:

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} > k(n+1)\,;$ ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} < \frac{n+1}{k}\,.$

Dumitru Acu, Sibiu

3) Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in (0, \infty)$ şi $-a - c < \beta \leq \alpha < b + d$. Să se demonstreze că:

a) $\displaystyle 1 + \frac{c+\alpha}{a} + \frac{a+c+\alpha}{b+c+d} \geq \frac{4(a+c+\alpha)}{a+b+c+d}\,;$ b) $\displaystyle \frac{c+\alpha}{a} + \frac{b+d-\beta}{a+c+d} + \frac{a+c+\alpha}{b+c+d} + \frac{d-\beta}{b} \geq 2\,.$

Emil C. Popa, Sibiu

4) Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile a, b, c. Să se arate că paralelipipedul este cub dacă şi numai dacă

$$(a+b+c)\mathrm{d}^2(A, (A'BD)) \geq abc.$$

Petru Vlad, Sibiu