Micii matematicieni - editia a VI-a 26 martie 2011

Clasa a VII - a

Subiectul I (20 puncte) :

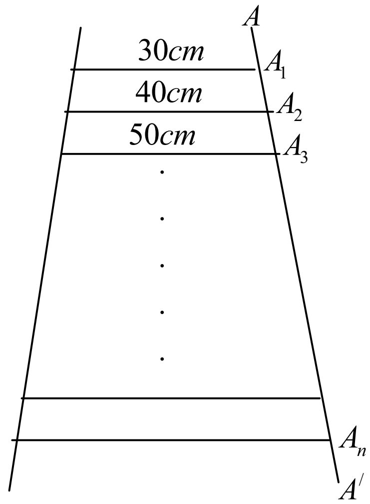
1. Să se determine numărul prim $\overline{ab}$ ştiind că partea întreagă a numărului $\sqrt{\overline{ab}}$ este 6
2. Arătaţi că nu există un număr întreg $x \neq 0$ astfel încât $x^{2011} - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x = 0$.

3.a) Descompuneţi în factori expresia: $x \cdot (x+3) + 2$.

b) Folosind descompunerea de la a) calculaţi:

$$\frac{(4\cdot 7+2)(6\cdot 9+2)(8\cdot 11+2)\dots(2010\cdot 2013+2)}{(5\cdot 8+2)(7\cdot 10+2)(9\cdot 12+2)\dots(2009\cdot 2010+2)}$$

Subiectul II (20 puncte) :



Tâmplarul şcolii vrea să construiască o scară având forma trapezoidală cu dimensiunile treptelor din figura alăturată.

Se ştie că $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = 20\ cm$,

$AA_1 = A_nA' = 10\,cm$ şi $AA' = 3{,}4\ m$,.

a) Stabiliţi câte trepte are scara.

b) Calculaţi câte scânduri de lungime 3,5 m trebuie să cumpere tâmplarul pentru a putea confecţiona scara cu cât mai puţin material ca reziduu.

c) Care este lungimea totală a materialului pierdut?

Subiectul III (20 puncte) :

Se consideră ΔABC cu $AB = AC$ și $\sphericalangle BAC = 40^\circ$. Punctele S și T se află pe laturile AB, respectiv BC, astfel încât $\sphericalangle BAT = \sphericalangle BCS = 10^\circ$. Dreptele AT și CS se intersectează în P. Demonstrați că $BT = 2PT$.

Clasa a VIII - a

Subiectul I (30 puncte) :

1. Fie expresia algebrică: $E(x) = \left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 1 + \frac{2x-2}{x+1}\right] \cdot \frac{(x+1)(x^2-x+1)+3x+3x^2}{16x^2}$.

a) Aduceţi la forma cea mai simplă expresia în condiţiile de existenţă determinate în prealabil.

b) Pentru ce valori ale lui $x \in N$, partea întreagă a numărului $\sqrt{E(x)}$ este inversul numărului E(x) ?

2. a) Demonstraţi că pentru orice $x \in [0;2012)$ are loc inegalitatea: $\sqrt{\frac{x}{2012-x}} \geq \frac{x}{1006}$.

b) Arătaţi că are loc inegalitatea: $\sqrt{\frac{1}{2011}} + \sqrt{\frac{2}{2010}} + \sqrt{\frac{3}{2009}} + \dots + \sqrt{\frac{2011}{1}} > 2011$.

Subiectul II (15 puncte) :

Trei elevi au scris fiecare câte 60 de cuvinte. Analizând listele, s-au şters cuvintele care s-au găsit cel puţin de două ori. După această operaţie s-a constatat că un elev a rămas pe listă cu 40 de cuvinte, altul cu 48, iar ultimul mai are pe listă 43. Să se demonstreze că cel puţin un cuvânt a fost scris de toţi trei.

Subiectul III (15 puncte) :

Să se arate că tetraedrul care are lungimile muchiilor laterale egale cu $\sqrt{3}$ şi care fac între ele unghiuri de 60^0, 90^0 , respectiv 120^0 au două înălţimi egale.