

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPIAN
EDIȚIA A X-A
ETAPA JUDEȚEANĂ, 20 FEBRUARIE 2010

Clasa a VII-a
BAREM

SUBIECTUL I

a) Dacă $x \in \mathbb{Z}$ și $\frac{3x+2}{4x-3} = y \in \mathbb{Z}$, atunci $\frac{4x-3}{3x+2} = \frac{1}{y} \in \mathbb{Z}$ și atunci $y \in \{-1; +1\}$. (3p)

$$\frac{3x+2}{4x-3} = -1 \text{ implică } 3x+2 = -4x+3, \text{ de unde } 7x = 1, \text{ imposibil, căci } x \in \mathbb{Z}. (1p)$$

$$\frac{3x+2}{4x-3} = 1 \text{ implică } 3x+2 = 4x-3, \text{ de unde } x = 5. (1p)$$

b) Căutăm numere naturale x pentru care $F(x) \in \mathbb{N}$, cea ce este echivalent cu $(n+1)x-n \mid nx+n-1$ și $(n+1)x-n \mid (n+1)x-n$, de unde $(n+1)x-n \mid (n+1) \cdot n \cdot x + n^2 - 1$ și $(n+1)x-n \mid n(n+1) - n^2$ și atunci $(n+1)x-n \mid 2n^2 - 1$. (2p) Alegem doi divizori ai lui $2n^2 - 1$: 1 și $2n^2 - 1$. Prin urmare $(n+1)x - n = 1$, de unde $(n+1)x = n+1$ și $x=1$, 1 impar, și $(n+1)x - n = 2n^2 - 1$, de unde $(n+1)x = 2n^2 + n - 1$, adică $(n+1)x = (n+1)(2n-1)$ și $x = 2n - 1$, $2n - 1$ impar. (3p)

$$F(1) = \frac{n \cdot 1 + n - 1}{(n+1) \cdot 1 - n} = \frac{2n-1}{1} = 2n-1 \text{ și } F(2n-1) = \frac{n \cdot (2n-1) + n - 1}{(n+1) \cdot (2n-1) - n} = \frac{2n^2 - 1}{2n^2 - 1} = 1.$$

Prin urmare, putem alege $a = 1$ și $b = 2n - 1$. (3p) Din oficiu 2p.

SUBIECTUL II

a) Datorită simetriei rezultă că aria figurii obținute este dublul ariei pătratului. (3p)

b) Se arată că se obține un patrulater cu laturile ce trec prin vârfurile pătratului. (3p)

c) Din $OA_1 \cdot OA_4 = OA_2 \cdot OA_3$ rezultă că $\frac{OA_1}{OA_3} = \frac{OA_2}{OA_4}$ și atunci $A_1A_2 \parallel A_3A_4$. (2p) Din unghiuri

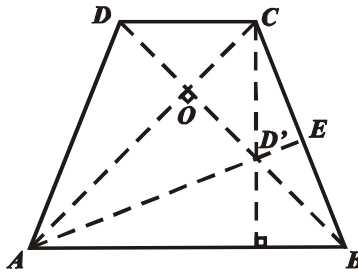
opuse la vârf deducem că O se află pe o diagonală. (2p) Se obține un trapez (eventual paralelogram). În final, arată că \mathcal{F} este un trapez isoscel ortodiagonal (eventual pătrat dacă O este centrul pătratului inițial). Figura \mathcal{F} are drept axă de simetrie diagonală pătratului pe care se află O . (3p) Din oficiu 2p.

SUBIECTUL III

a) $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$ implică $\triangle OCD$ isoscel, de unde $[OC] \equiv [OD]$ (1).

Deoarece $AB \parallel CD$ avem că $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle ABD$ (alterne interne). (3p) Cum $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$, rezultă că $\triangle OAB$ este isoscel și $[OA] \equiv [OB]$ (2).

Din (1) și (2), rezultă că $OC+OA=OD+OB$ și atunci $AC=BD$ și trapezul $ABCD$ va fi isoscel. (3p)



Notă. Considerarea unei paralele la o diagonală se punctează.

b) În $\triangle ABC$, (BO) și (AE) ($AD' \cap BC = \{E\}$) sunt înălțimi, de unde rezultă că D' este ortocentrul lui și, deci, $CD' \perp AB$. (4p) Cum $AB \parallel CD$, rezultă că $CD' \perp CD$, adică $\triangle CDD'$ este dreptunghic în C . Cum $[CO]$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei (DD') , avem $CO = \frac{DD'}{2} = DO$, căci D' este simetricul lui D față de O . Din $(CO) = (DO)$ rezultă că $\triangle OCD$

isoscel și $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$, de unde conform punctului **a)**, $ABCD$ este trapez isoscel.

Obs. La a) și b) sunt adevărate și reciprocele (la **b)**, dacă $ABCD$ este trapez isoscel și $AC \perp BD$ atunci $AD' \perp BC$). (3p) Din oficiu 2p.

Notă. Există soluții fără a evidenția că D' este ortocentru. Arată că $\triangle DOA \sim \triangle COB$, de aici deduce că $OC = OD$.