Clasa a VII-a

Problema 1. Deoarece numerele $a, \overline{ab}, \overline{abc}$ trebuie să fie pătrate perfecte, avem $a, b, c \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$ (1p).
Dacă $a = 1$ rezultă $b = 6$ şi cum $\sqrt{\overline{16c}} \in \mathbb{N}$, rezultă $c = 9$, de unde rezultă egalitatea (1p)
Dacă $a = 4$ rezultă $b = 9$ şi $\sqrt{\overline{49c}} \notin \mathbb{N}$, oricare ar fi cifra c (1p)
Dacă $a = 5$ rezultă $\sqrt{\overline{5b}} \notin \mathbb{N}$ oricare ar fi cifra b (1p)
Dacă $a = 6$ rezultă $b = 4$ şi $\sqrt{\overline{64c}} \notin \mathbb{N}$, oricare ar fi cifra c (1p)
Dacă $a = 9$ rezultă $\sqrt{\overline{9b}} \notin \mathbb{N}$ oricare ar fi cifra b (1p)
Deci $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$ (1p).

Problema 2. Inegalitatea mediilor implică $\sqrt{k} = \sqrt{k \cdot 1} < \frac{k+1}{2}$ (1p), deci $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{k+1}$ (1p), adică $\frac{1}{k\sqrt{k}} > \frac{2}{k(k+1)}$ (1p), de unde $\frac{\sqrt{k}}{k^2} > 2 \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ (1p)
Pentru $k = \overline{1, 2009}$, rezultă

$$\frac{\sqrt{1}}{1^2} + \frac{\sqrt{2}}{2^2} + \ldots + \frac{\sqrt{2009}}{2009^2} > \frac{2009}{1005}$$

(3p).

Problema 3. Figura (1p)
Fie E, F, D mijloacele segmentelor $[AM]$, $[BM]$, $[CM]$ (1p)
$\dfrac{CG_2}{CF} = \dfrac{CG_3}{CE} = \dfrac{2}{3}$, de unde rezultă $G_2G_3 \| EF$ (1p)
În triunghiul MAB, $[EF]$ linie mijlocie, de unde $EF \| AB$ şi deci $G_2G_3 \| AB$ (1p)
$\dfrac{G_2G_3}{EF} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{1}{2}$, de unde rezultă $\dfrac{G_2G_3}{AB} = \dfrac{1}{3}$ (1p)
Analog obţinem $\dfrac{G_3G_1}{BC} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{G_1G_2}{AC} = \dfrac{1}{3}$, de unde $\dfrac{G_1G_2}{AC} = \dfrac{G_2G_3}{AB} = \dfrac{G_3G_1}{BC}$ (1p).
Deci triunghiurile $G_1G_2G_3$ şi CAB sunt asemenea, cu raportul de asemănare $1/3$, deci raportul ariilor este $1/9$ (2p).

Problema 4. Figura (1p)
$[MN]$ linie mijlocie în triunghiul COB, deci $2MN = BC = DA$ (1p)
$MP = MN$, deci $2MP = DA$, de unde $DM \perp OC$. Din $[DM]$ mediană în triunghiul DOC, rezultă $DO = DC$, deci triunghiul DOC este echilateral (2p)
$m(\angle DOC) = 60°$, deci triunghiul AOB este echilateral (1p)
$\triangle$ AND dreptunghic în N, iar $2NP = AD$ (1p)
$\triangle$ MNP echilateral, deci măsurile unghiurilor sunt de $60°$ (1p).