Soluții
CLASA a V a

I. a) $a=(0+1+2+...+n)+(n+1)\cdot\frac{3}{10}$

$a=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\cdot\frac{3}{10}$

$\frac{n(n+1)}{2}\in N$, n(n+1) fiind produs de două numere consecutive, deci par

Atunci $a\in N$ dacă $(n+1)\cdot\frac{3}{10}\in N$

(3 , 10) = 1, deci n+1=M10, de unde $n\in\{9,19,29,....\}$

b) $\frac{a}{n+1}=\frac{n}{2}+\frac{3}{10}$

Dacă n este par, atunci $\frac{n}{2}\in N, \frac{3}{10}\in Q_+-N\Rightarrow\frac{a}{n+1}\in Q_+-N$,

Dacă n este impar, atunci $\frac{a}{n+1}=\frac{5n+3}{10}$; $u(5n)\in\{0;5\}\Rightarrow u(5n+3)\in\{3;8\}\Rightarrow\frac{a}{n+1}$ nu este divizibil cu 10.

II. a) $1+7+7^2+7^3=400$

Cei 2012 termeni se grupează câte 4

$A=1+7+7^2+7^3+7^4(1+7+7^2+7^3)+...+7^{2008}(1+7+7^2+7^3)$

$\Rightarrow A=400(1+7^4+7^8+...+7^{2008})\vdots 10$

b) Suma $1+7^4+7^8+...+7^{2008}$ conține 503 termeni, având fiecare ultima cifră egală cu 1

$\Rightarrow u(1+7^4+7^8+...+7^{2008})=3$

Ultimele trei cifre ale lui A sunt date de produsul $400\cdot 3$, deci 200

c) $A=(7^{2012}-1):6\Rightarrow 6A+1=7^{2012}=(7^{1006})^2$

III. a) Calcul direct

b) $a=43\cdot0+4+43\cdot1+4+43\cdot11+4+\ldots+43\cdot\underbrace{11...1}_{2010}+4=43(1+11+\ldots+\underbrace{11...1}_{2010})+2011\cdot4=$

$=43(1+11+\ldots+\underbrace{11...1}_{2010}+187)+3$, 8044:43=187r3, deci restul împărțirii este 3

c) u(c)=u(2010+7)=7

pu(c)=u(201+2009+8)=8

IV. Suma cifrelor numărului este 9x1+8x2+7x3+6x4+5x5+4x6+3x7+2x8+1x9=165=9x18+3. Această sumă se divide cu 3 dar nu se divide cu 9, aşadar şi numărul A se divide cu 3 dar nu se divide cu 9.

Soluții
CLASA a VI a

I. a) Pentru a fi impar x trebuie ca m=0 si p=0

n,q∈{0,1,…, 9} deci vor fi 10·10=100 elemente impare

b) La elemente impare avem m=p=0 , rezulta n + q < 5.

Pentru n=0 avem q∈{0,1,2,3,4} $P_0=5^{4+8+12+16}=5^{40}$

Pentru n=1 avem q∈{0,1,2,3} $P_1=3^8\cdot 5^{4+8+12}=3^8\cdot 5^{24}$

Pentru n=2 avem q∈{0,1,2} $P_2=3^{12}\cdot 5^{4+8}=3^{12}\cdot 5^{12}$

Pentru n=3 avem q∈{0,1} $P_3=3^{12}\cdot 5^4=3^{12}\cdot 5^4$

Pentru n=4 avem q=0 $P_4=3^8$

$P=P0\cdot P1\cdot P2\cdot P3\cdot P4=3^{40}\cdot5^{80}$ sau prin calculul direct al produsului

II. 1. Fie fracția $\frac{m}{n}$, cu $(m;n)=1$, astfel încât:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{96}{77}\in N;(96,77)=1\Rightarrow m\vdots 77, n\mid 96$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{108}{91}\in N;(108,91)=1\Rightarrow m\vdots 91. n\mid 108$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{144}{143}\in N;(144,143)=1\Rightarrow m\vdots 143, n\mid 144$$

Atunci : - m este multiplu comun al numerelor 77, 91 şi 143
- n este divizor comun al numerelor 96, 108 şi 144

$\frac{m}{n}$ este cea mai mică fracție pentru m cel mai mic multiplu comun şi n cel mai mare divizor comun, deci m=1001 şi n=12, iar $\frac{m}{n}=\frac{1001}{12}$

2. $$\frac{a}{na+mb}=\frac{b}{nb+mc}=\frac{c}{nc+ma}=\frac{a+b+c}{(a+b+c)(n+m)}=\frac{1}{n+m}$$

$$\frac{a}{na+mb}=\frac{1}{n+m}\Leftrightarrow na+ma=na+mb\Leftrightarrow a=b$$

Analog $\Rightarrow a=b=c$

Triunghiul fiind echilateral, măsurile unghiurilor sale sunt 60°.

III. a) $\Delta AEB\equiv\Delta AEF$ (CC)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow [AB]\equiv[AF]\\ \ [AB]\equiv[AC]\end{array}\right\}\Rightarrow [AC]\equiv[AF]$$

$\Delta ABC\equiv\Delta AFC$ (LUL)

b) [DE] este linie mijlocie în triunghiul FBC, de unde concluzia

c) $m(\prec AFC)=70^\circ, m(\prec PAF)=60^\circ\Rightarrow m(\prec APC)=50^\circ$

IV. Deoarece $AB\neq AD\neq AC$, triunghiul ABD poate fi isoscel in două moduri (BD=AD sau BD=AB), iar triunghiul ADC poate fi isoscel tot în două moduri (DC=AD sau DC=AC)

Se obțin următoarele patru cazuri:

1) BD=AD, DC=AD.

$m(\prec BAD)\equiv m(\prec ABD), m(\prec DAC)\equiv m(\prec DCA)$

$\Rightarrow m(\prec BAC)=m(\prec BAD)+m(\prec DAC)=m(\prec ABD)+m(\prec DCA)=180^\circ-m(\prec BAC)$

$\Rightarrow m(\prec BAC)=90^\circ$

2) BD=AD, DC=AC

$m(\prec BAD)\equiv m(\prec ABD), m(\prec DAC)\equiv m(\prec ADC)=2\cdot m(\prec ABD)$, ABD fiind unghi exterior triunghiului ADB

$\Rightarrow m(\prec BAC)=m(\prec BAD)+m(\prec DAC)=m(\prec ABD)+2m(\prec ABD)=3m(\prec ABD)$

3) BD=AB, DC=AD

$m(\prec DAC)=m(\prec DCA), m(\prec BAD)=m(\prec BDA)=2m(\prec DCA)$

$\Rightarrow m(\prec BAC)=m(\prec BAD)+m(\prec DCA)=3m(\prec DCA)$

4) BD=AB, DC=AC

$m(\prec BAD)=m(\prec BDA), m(\prec DAC)=m(\prec ADC)$

$\Rightarrow m(\prec BAC)=m(\prec BAD)+m(\prec DAC)=m(\prec BDA)+m(\prec ADC)=180^\circ$, imposibil