CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA A II-A, TULCEA, 14 MAI 2011

Soluții orientative și bareme

Clasa a VII-a

1. a) Arătați că există cel puțin un număr natural n astfel încât $10^{29} < 2^n < 10^{30}$.

b) Numărul 2^m se scrie cu 30 de cifre. Arătați că există o cifră se repetă de cel puțin patru ori în scrierea lui 2^m.

Soluție:

a) Presupunem că există p, număr natural astfel încât $2^p < 10^{29} < 10^{30} < 2^{p+1}$. **1p**

Atunci $2 = \dfrac{2^{p+1}}{2^p} > \dfrac{10^{30}}{10^{29}} = 10$, fals. Rezultă că $n = p$ sau $n = p+1$. **2p**

b) Presupunem că fiecare dintre cifre se repetă de exact trei ori. **2p**

Rezultă că suma cifrelor lui 2^m este multiplu al lui 3, adică 2 divide 3, fals. **2p**

2. Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=\dfrac{a+b+c}{2}$.

L. Panaitopol (GM-2004)

Soluție: Dacă $\min\{a,b,c\} \geq 2$, atunci $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c} \leq \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2} = 3$ și $\dfrac{a+b+c}{2} \geq \dfrac{2+2+2}{2} = 3$.

Rezultă că $a = b = c = 2$.

Deasemenea, dacă $\max\{a,b,c\} \leq 2$, obținem $a = b = c = 2$.

Dacă toate numerele ar fi mai mici decât 2, obținem contradicție.**2p**

Rezultă că cel puțin unul dintre numere este egal cu 1 și cel puțin un număr este mai mare decât 2. **1p**

Dacă toate numerele ar fi impare, cum $2bc + 4ac + 6ab = abc(a+b+c)$, obținem contradicție. **1p**

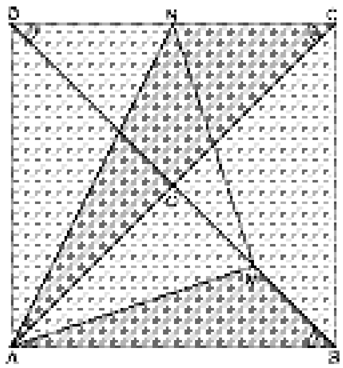
Presupunem că numărul par este cel puțin egal cu 4. Cum unul dintre numere este egal cu 1, atunci relația $\dfrac{2}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{6}{c} = a+b+c$ este imposibilă. **2p**

Dacă numărul par este egal cu 2 obținem al treilea număr egal cu 3. **1p**

3. Se consideră un paralelogram $ABCD$ cu centrul O. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor $[BO]$ și $[CD]$.

Dacă triunghiurile ABC și AMN sunt asemenea, demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

Soluție: Deoarece triunghiurile ABC și AMN sunt asemenea, rezultă că $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ și



$\angle MAN \equiv \angle BAC$. **1p**

De aici deducem că $\angle BAM \equiv \angle CAN$. Prin urmare, triunghiurile BAM și CAN sunt asemenea, adică $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$ și $\angle ABM \equiv \angle NCA$. **2p**

Dar $\angle BDC \equiv \angle NCA$, deci $ABCD$ este dreptunghi. **1p**

Cum $BM = \frac{1}{4} \cdot BD = \frac{1}{4} \cdot AC$ și $CN = \frac{1}{2} \cdot DC$, rezultă că $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{2 \cdot AB}$, adică $2 \cdot AB^2 = AC^2$ și $AC^2 = BC^2 + AB^2$.
2p

Prin urmare, $BC = AB$. Înseamnă că patrulaterul $ABCD$ este pătrat. **1p**

4. Fie n un număr natural care are exact 9 divizori și D_n mulțimea divizorilor săi. Arătați că, dacă X este o submulțime de trei elemente a lui D_n, atunci produsul elementelor lui X este cub perfect sau există trei elemente în mulțimea $D_n \setminus X$ al căror produs este cub perfect.

Prof. Mircea Fianu, București

Soluție: Numărul n este de forma $n = a^8$, unde a este număr prim sau $n = p^2 \cdot q^2$, unde numerele p și q sunt prime. **1p**

În fiecare caz, divizorii numărului n se așează într-un pătrat 3×3 astfel(vezi figura): **2 p**

a^3	a^8	a^1
a^2	a^4	a^6
a^7	a^0	a^5

sau

p	p^2q^2	q
q^2	pq	p^2
p^2q	1	pq^2

În fiecare caz, produsul numerelor de pe fiecare linie sau coloană este cub perfect. **2p**

Dacă mulțimea X conține trei elemente de pe o diagonală, concluzia este adevărată. **1p**

Dacă mulțimea X conține cel mult două elemente de pe o diagonală, atunci mulțimea $D_n \setminus X$ conține toate elementele unei linii (coloane), deci concluzia este adevărată. **1p**